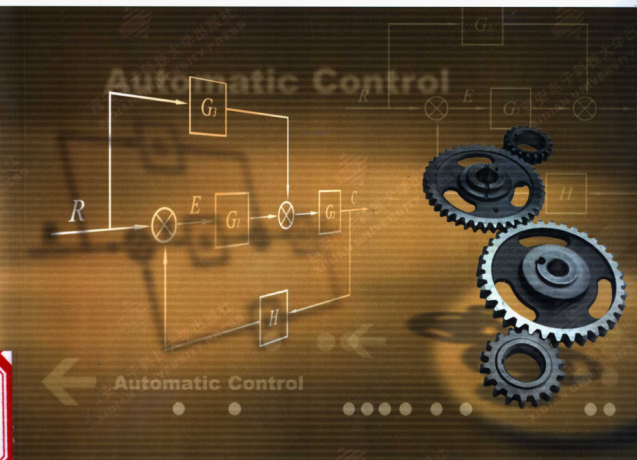


21世纪

高等学校电子信息类系列教材

自动控制原理 学习指导与题解

■ 方斌 编著



西安电子科技大学出版社

<http://www.xduph.com>



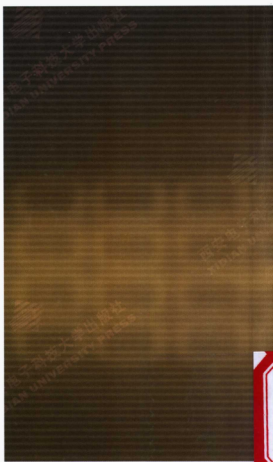
XDUP 150300

封面设计制作：成 艺

ISBN 7-5606-1232-6



9 787560 612324 >



ISBN 7 - 5606 - 1232 - 6 / TP • 0645

定价：22.00元

面向 21 世纪高等学校电子信息类系列教材

自动控制原理 学习指导与题解

方 斌 编著

西安电子科技大学出版社

2003

内 容 简 介

本书共分 10 个章节(含现代部分),包含自动控制的一般概念、控制系统的数学模型、控制系统的时域分析法、根轨迹分析法、控制系统的频域分析法、线性系统的校正、采样控制系统、非线性系统分析、线性系统理论和线性定常系统的综合——状态反馈与状态观测器。每章都有较为详细和全面的总结,并配有丰富、典型的例题。例题取材范围广,其中很多都取自国内一些重点高校历年的考研试题。书中对每道例题都给出了详尽的说明和讨论,并尽可能地做到一题多解。本书注重阐述各种解题方法和注意事项,对于较容易被忽视或出错的问题,都加以特别强调或说明。另外,每章后给出多道习题以便读者练习,巩固所学内容。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理学习指导与题解/方斌编著. —西安:西安电子科技大学出版社, 2003. 10

(21 世纪高等学校电子信息类系列教材)

ISBN 7-5606-1232-6

I. 自… II. 方… III. 自动控制理论-高等学校-教学参考资料 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028544 号

责任编辑 李惠萍

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)8242885 8201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com

E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 21.625

字 数 517 千字

印 数 1~4 000 册

定 价 22.00 元

ISBN 7-5606-1232-6/TP·0645

XDUP 1503001-1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

“自动控制原理”是高等院校自动化类专业教学中的一门重要专业理论基础课。它不仅具有相当的理论深度,需要学习者有较好的数学基础,而且对初学者来讲确有一定的难度,尤其是一些控制理论的概念和方法,初学者较难理解和掌握。为了帮助初学者掌握好这门理论技术,同时也为满足报考研究生的读者进行系统复习的需要,作者根据对该课程多年教学工作的经验,并结合近几年来国内各高校考研要求,特编写此书。

本书特点有二:一是内容全面。书中对教学基本内容进行了较为详细和系统的归纳与总结,力求重点突出,简明扼要,使读者首先对每章内容有个总体的概括性了解,了解每章的基本要求和目的;对于基本概念、基本公式和基本特性图形,做到“一书在手,应有尽有”;对较容易被忽视或出错的问题进行特别强调和重点阐述。二是例题量大,覆盖面宽。通过对典型例题的解答,使读者既巩固了基础知识,又提高了分析问题和解题的能力;在解题过程中,注重解题思路和一题多解,对每题作出详细的分析和说明,以达到融会贯通、举一反三的目的;在多数例题后安排讨论,讨论内容包含完成解题后需总结的问题或延伸的内容或应注意的重点。

本书共分10个章节(包含现代部分):第1章介绍自动控制的一般概念;第2章介绍控制系统的数学模型;第3章介绍控制系统的时域分析法;第4章介绍根轨迹分析法;第5章介绍控制系统的频域分析法;第6章介绍线性系统的校正;第7章介绍采样控制系统;第8章介绍非线性系统分析;第9章介绍线性系统理论;第10章介绍线性定常系统的综合——状态反馈与状态观测器。每章最后都安排有习题,这些习题都具有一定的代表性,有利于读者进行自我检查。书后附有各章习题的参考答案和部分说明。考虑到报考研究生的读者复习的需要,附录中还安排有两套模拟试题以便参考。

本书由方斌教授编写,张德祥同志在每章习题的整理和习题的参考答案方面做了大量工作,丁石川同志为本书的打印也做了大量的工作,在此谨表感谢。

由于作者水平有限,不妥之处恳请读者批评、指正。

编著者

2003.8.10

目 录

第 1 章 自动控制的一般概念	1	4.5 利用根轨迹法分析和估算系统 的性能	69
1.1 本章要求	1	4.6 例题讲解	70
1.2 基本概念	1	4.7 习题	86
1.3 控制系统的基本要求	2	第 5 章 控制系统的频域分析法	89
1.4 自动控制系统研究的内容	3	5.1 本章要求	89
1.5 系统分类	3	5.2 基本概念	89
1.6 例题讲解	4	5.3 典型环节的频率特性	90
1.7 习题	8	5.4 开环频率特性的绘制	92
第 2 章 控制系统的数学模型	10	5.5 频率域的稳定性判据	93
2.1 本章要求	10	5.6 稳定裕量	96
2.2 系统的数学模型	10	5.7 系统频域特性与时域响应的关系	97
2.3 典型环节的数学模型	11	5.8 例题讲解	98
2.4 传递函数与脉冲响应	12	5.9 习题	123
2.5 方框图与信号流程图	12	第 6 章 线性系统的校正	128
2.6 控制系统的传递函数	14	6.1 本章要求	128
2.7 例题讲解	15	6.2 基本概念	128
2.8 习题	33	6.3 串联校正	132
第 3 章 控制系统的时域分析法	36	6.4 反馈校正	134
3.1 本章要求	36	6.5 其它校正	135
3.2 基本概念	36	6.6 例题讲解	136
3.3 线性系统的暂态性能	37	6.7 习题	166
3.4 线性系统的稳定性	39	第 7 章 采样控制系统	170
3.5 控制系统的稳态性能	40	7.1 本章要求	170
3.6 例题讲解	42	7.2 基本概念	170
3.7 习题	62	7.3 Z 变换及其基本性质	173
第 4 章 根轨迹分析法	66	7.4 脉冲传递函数的求取	175
4.1 本章要求	66	7.5 离散系统的稳定性分析	177
4.2 基本概念	66	7.6 离散系统的分析与综合	177
4.3 绘制根轨迹的基本法则	68	7.7 例题讲解	181
4.4 广义根轨迹(或参数根轨迹)和 根轨迹簇	69	7.8 习题	194

第 8 章 非线性系统分析	197
8.1 本章要求	197
8.2 基本概念	197
8.3 相平面法	202
8.4 描述函数法	206
8.5 例题讲解	210
8.6 习题	228
第 9 章 线性系统理论	233
9.1 本章要求	233
9.2 基本概念	233
9.3 状态空间表达式的求取	240
9.4 状态转移矩阵与运动的解	245
9.5 离散系统与连续系统离散化	249
9.6 能控性与能观性	250
9.7 系统的结构分解与实现问题	255
9.8 李亚普诺夫的稳定性的稳定性	261
9.9 例题讲解	265
9.10 习题	297

第 10 章 线性定常系统的综合——状态反馈与状态观测器	302
10.1 本章要求	302
10.2 基本概念——反馈控制系统的基本结构及其特性	302
10.3 极点配置	304
10.4 镇定问题	305
10.5 解耦问题	306
10.6 状态观测器	307
10.7 带状态观测器的状态反馈系统	308
10.8 例题讲解	310
10.9 习题	317
附录 A 模拟试题一	319
附录 B 模拟试题二	321
附录 C 各章习题参考答案	323
参考文献	340

第1章 自动控制的一般概念

1.1 本章要求

- (1) 掌握反馈控制系统的基本原理、组成部分以及控制系统的分类。
- (2) 正确理解稳、快、准三方面性能指标。这是控制系统分析和综合的根本点。
- (3) 能根据实际系统的工作原理绘制系统的原理方框图。要正确绘制系统的方框图，必须明确控制系统的被控对象、输出量、给定输入量(给定量)和扰动输入量，尤其应注意的是什么是系统的给定输入量。

1.2 基本概念

1. 自动控制系统

自动控制是指在不直接参加的情况下，利用人为有目的外加的设备或装置使某个生产过程或机器设备按照预定的某种规律运行或使其某个物理参数按照预先要求的数值变化。这一生产过程或机器设备称为**被控对象**，其某个物理参数称为**被控量**，其预先要求的数值称为**希望值**。用以实现自动控制的外加设备或装置称为**自动控制装置(或控制器)**。

这种由自动控制装置和被控对象组成的，能自动地使被控对象的工作状态或其被控量得以控制并具有预定性能的动力学系统称为**自动控制系统**。

2. 系统的输出量和输入量

被控对象中被要求控制的某个物理参数即被控量称为系统的**输出量**。系统中某个参量的改变会导致系统的希望值改变，这个参量与输出量具有一定的因果关系，该量称为系统的**输入量**。输入量与希望值往往有一一对应关系。当输入量一定时，根据一一对应关系其输出值也就一定。若输出值接近希望值，则认为系统性能好；若输出值与希望值相差较大，则认为系统性能不好。

输入端是输入量作用的位置。从输入量对被控系统的影响来看，输入量可分成**给定输入量**和**扰动输入量**。人为有目的地加入外界信号，使它作用于系统的输入端并使系统的被控量具有预定功能或规律(希望值)，这一信号称为**给定输入量**。而破坏系统给定输入量和输出量原预定规律的外界信号称为**扰动输入量**；它常常可等效地理解，即扰动输入量相当于给定的输入量没有目的地波动，导致预定规律发生不希望的变化。所谓输入端，是指该位置的输入量是设计者为了根据实际的需要而有目的地调节系统的希望值所外加输入量(即给定输入量)作用的地方。

3. 控制方式和基本组成

开环控制是指在控制器与被控对象之间只有正向控制作用，而没有反向控制作用，见图 1-1。

闭环控制又称反馈控制，是指在控制器与被控对象之间不仅有正向控制作用，而且有反向控制作用，见图 1-2。



图 1-1 开环控制

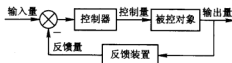


图 1-2 闭环控制

复合控制是开环控制和闭环控制相结合的一种控制方式，见图 1-3。

反馈控制是自动控制系统的重要形式。反馈控制的实质就是利用负反馈，使系统具有自动修正被控制量(输出量)偏离期望输出的控制能力。此种控制系统可以抑制内、外扰动引起的误差，达到自动控制并具有提高控制精度之目的。

控制系统可以用方框图表示其组成和各部分之间信号的传递关系。方框图也叫方块图。例如，方框图 1-3 包含闭环控制系统的基本部分：



图 1-3 复合控制

给定器——产生给定输入(这部分图中未标)；

控制器——一般由比较器、放大器、调节器、执行器等组成；

被控对象——由被控制的装置组成；

反馈装置——对系统输出检测和变换产生反馈信号。

1.3 控制系统的基本要求

自动控制系统的目的是使被控量按照希望的某种规律运行，或者说，系统从最初的平衡状态在控制的作用下使系统达到新的所希望的平衡状态。那么，如何来衡量控制系统的输出量是否按照希望的某种规律运行或达到新的所希望的平衡状态呢？这样的衡量指标就是控制系统的基本要求，即稳、快、准。

稳——稳定性：指系统能否达到新的平衡状态。稳定是系统首先必须满足的条件，不稳定的系统是无法正常工作的。通俗地说，只有在系统能够使用的基础上，系统才有其它指标要求。

快——暂态性能：指系统从最初的平衡状态，在控制的作用下达到新的平衡状态的运动过程，必须满足一定的性能指标。通常用阶跃输入情况下输出量的最大超调量、上升时间、峰值时间、调节时间等指标来衡量。

准——稳态误差：指在新的平衡状态即稳态情况下系统的误差(新的平衡状态与所希望的平衡状态之差)也应满足一定的要求。根据控制系统是否存在稳态误差可将其分成有差系统和无差系统。

1.4 自动控制系统研究的内容

对系统的研究包括两类问题，即分析和综合。分析是指在给定系统的结构和参数的情况下分析、计算系统的稳、快、准这三个指标。综合是指研究系统应如何选择参数、改变结构，或应采用何种校正方式使系统能够满足这三个指标。

我们也可从纯数学角度来理解分析和综合问题。在已知被控量(输出量)和输入量之间的函数关系下，剖析该函数解的特性(稳、快、准)，这是分析问题。在已知被控对象的数学模型条件下，如何通过加入控制器达到修改被控量和输入量之间的函数关系，或者在函数关系一定的条件下修改函数中的某些参数，使该函数解的特性满足希望的特性，这便是综合问题。

由于被控量和输入量之间的函数关系较为复杂，难以直接从该函数获得系统的稳、快、准特性。因此，经典控制理论就给出了简捷的方法解决以下问题：

- (1) 不需要求助于方程的解，而能通过系统的数学模型来近似估计系统的性能。
- (2) 若结果不满足希望的性能，应能明确指出改善系统性能的途径。
- (3) 决定出一种合适的控制规律及相应的参数，从而修改函数关系使系统的性能满足要求。

1.5 系统分类

自动控制系统有多种分类，如按信号传递路径可分为开环、闭环和复合控制系统；按系统使用的能源可分为机械、电气、液压和气动控制系统。此外，还可以进行以下分类。

1. 随动系统、定值控制系统与程序控制系统——按设定值不同分类

随动系统是指系统的设定值(输入量)是随机变化的。其基本任务是使系统输出量以所要求的精度快速跟随输入量的变化。

定值控制系统是指系统的设定值(输入量)是常值或者是随时间缓慢变化的。其基本任务是当系统出现扰动时，能使系统的输出量保持为恒定的希望值。

程序控制系统是指系统的设定值(输入量)是按既定规律变化的。其基本任务是使系统输出量也按预定的程序进行。

2. 线性系统与非线性系统

线性系统是指可用线性微分方程或差分方程描述的系统。当方程中系数为常数时，称为线性定常系统；否则为线性时变系统。

非线性系统是指用非线性方程描述的系统。

3. 连续系统与离散系统

连续系统是指系统中的信号都为时间的连续函数。

离散系统是指系统中一处或多处信号为离散时间函数；在离散系统中，信号仅定义在离散时间上。

4. 单输入单输出系统与多输入多输出系统

单输入单输出(SISO)系统是指只有一个输入量和一个输出量的控制系统。

多输入多输出(MIMO)系统是指输入量和输出量多于一个的系统，又称为多变量系统。

5. 确定系统与不确定系统

确定系统是指系统的结构、参数和输入量都是确定的、已知的系统。

不确定系统是指系统本身的结构或参数以及作用于该系统的信号有不确定性或模糊性的系统。

1.6 例题讲解

例 1.1 图 1-4 为晶体管直流稳压电源，试画出系统结构图。

解 在抽象闭环系统结构图时，首先要抓住比较的是什么量；对于恒值系统，要明确基准量是什么；还应当清楚输入量和输出量是什么。

题中直流稳压电源的基准是稳压管的电压 U_w ，输出电压通过 R_3 和 R_4 分压 U_b 与 U_w 比较。如果输出量偏高， U_b 也偏高，使与之相连的晶体管基极电流 i_b 增大，集电极电流随之增大，在 R_c 上的电压也相应增加，于是输出电压相应减小。反之亦然，以达到稳压的作用。系统的结构图如图 1-5 所示。

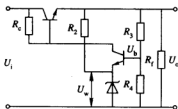


图 1-4 稳压电路

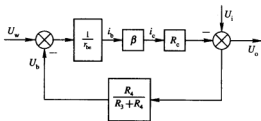


图 1-5 结构图

例 1.2 图 1-6 为液位自动控制系统原理示意图。在任何情况下，希望液面高度 h 维持不变，试说明系统工作原理，并画出系统原理的方框图。

解 液位自动控制系统的工作原理是：当电位器电刷处于电位器零电压位置时，电机不动，控制阀门 1 开度不变并维持一定的开度，使水箱中的流入水量和流出水量相等，从而液面保持在希望的高度 h 。当流入水量或流出水量发生变化时，水箱液面高度便相应地

发生变化。若液面升高，浮子位置亦相应升高，带动杠杆使电位器电刷从电位器零电压位置下移，从而给电机一定的控制电压，驱动电机通过减速器减小阀门开度，使进入水箱的流量减少，导致水箱液面下降，浮子位置相应下降，电位器电刷上移直到电位器零电压位置时，系统重新处于平衡状态，液面则恢复给定高度。反之，若水箱液面下降，电刷位置上移，电机通过减速器使阀门 1 开度加大，加大流入水量，使液面升到给定高度 h 。

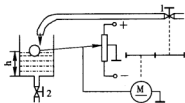


图 1-6 液位自动控制系统

画方框图的说明与分析：从题可知系统的任务是控制液面高度，因而液面高度为被控量（输出量），检测液面高度的元件是浮子，浮子的上下波动带动电刷位置的波动，电刷处于电位器零电压位置时电机控制电压为零，电刷位置上下波动偏离电位器零电压位置，使电机获得正或负的控制电压，此电压的大小取决于电刷相对于电位器的零电压位置的大小，因此电位器起到比较器的作用，电位器的零电压位置 h_r （此时电机不动）所对应的液面高度为希望高度，则 h_r 为给定的输入量，也就是说，改变电位器接地点也就改变了给定输入值。另外，因被控量为水箱的液面高度，所谓的被控对象就是该物体的某物理量即液面高度应表征控制要求和工作状态，因此水箱是被控对象，而不是电机，也不是阀门 1，它们是调节水箱液面高度的手段。

电位器零电压位置（给定输入）与电刷位置（反馈量）比较而产生偏差，该偏差通过电位器产生电机控制电压，控制电压驱动电机；电机通过减速器改变阀门 1 的开度，阀门 1 的开度直接控制了水箱的液面高度。而阀门 2 没有得到控制，由于阀门 2 的开度因某种原因产生的波动也直接影响水箱的液面高度，可将阀门 2 的开度波动视为干扰输入。所以液位自动控制系统的方框图如图 1-7 所示。



图 1-7 液面自动控制系统方框图

另外，利用第 2 章点的移动知识，可将图 1-7 中的比较点后移至浮子连杆环节的输入端，这样，方框图即如图 1-8 所示。

图 1-8 中虚框部分产生给定输入，即为液位的希望高度，因而方框图也可等效于图 1-9。

对于图 1-9 可以这样理解，因电刷处于零电位时，浮子所处的高度为希望液面高度，而电位器的零电位是人为设制的，因此电位器所构成的电路给出了要求的水位，所以给定的输入为希望的高度 h ，那么浮子在希望高度 h 附近波动即产生偏差，该偏差通过浮子连杆带动电刷在电位器上滑动，产生控制电压，其它同前述。

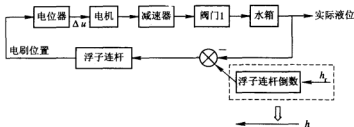


图 1-8 液面自动控制系统等效方框图



图 1-9 液面自动控制系统方框图

讨论：画系统原理的方框图，首先要明确什么是输入量，什么是输出量；输出量较容易确定，它即为被要求控制的某个物理量，而输入量（给定输入量）可通过检测输出量的元件或装置的信号传递路径来确定。给定输入量就是与检测信号进行比较的信号。该类题值得注意的另一个问题是：被控对象是指被控制的设备或机器，而且该设备或装置的某特征物理量就是被控量，有时被控对象可能只是设备或装置的某一部分。给定输入常常为被控量的期望值，而该期望值往往由某特定的设备或装置产生，见图 1-9 下的说明；当然如果对给定装置再进一步分析，在该装置中某个量的改动必改变系统的期望值，则这个量也可理解为给定输入，如图 1-8 所示。

总之，方框图的形式并不一定是惟一的，可以将元部件分解得细一些，也可以画得概括、简洁一些，但各个方框所代表的具体元部件及各方框间的联系必须和实际情况一致。

另外，此类题目有时还要求写出各环节的传递函数。该例题的各环节特性为：浮子连杆为比例作用，电位器也为比例作用，同时将位置量转化为电量，电机为惯性环节串积分环节（因电机输出为角度，若电机输出为角速度则为惯性环节），减速器为比例环节，阀门 1 也为比例环节（其输出为流量），水箱为惯性环节。

例 1.3 图 1-10 是一个带有测速反馈的位置随动系统。图中，1 为控制电位器，2 为反馈电位器，K 为电压放大器，SM 为电动机，TG 为测速发电机。试画出系统原理的方框图。

解 说明与分析：系统的控制任务是控制负载的转角位置 φ_2 并跟随手柄转角 φ_1 ，因此 φ_2 为被控量， φ_1 由手柄人为给定，因此它为给定输入量；环形电位器 1 和 2 构成桥式电路，当 $\varphi_2 = \varphi_1$ 即桥式电路处于平衡状态时，系统也处于平衡状态，电路输出的电压 $U_0 = 0$ ；当 $\varphi_2 \neq \varphi_1$ 时， U_0 正比于 $\varphi_1 - \varphi_2$ ，也就是说桥式电路在此起到比较器的作用。

下面简述其工作过程：系统初始处于某一平衡状态（即 $\varphi_2 = \varphi_1$ ），若手柄转角 φ_1 人为地发生变化，假设为增大，由于惯性负载转角 φ_2 并没有立即跟随 φ_1 的改变，因而 U_0 不为

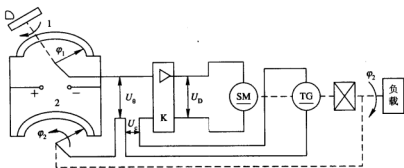


图 1-10 位置随动系统

零而为正， U_s 通过放大器到 U_D 驱动电机 SM 转动，电机转动通过减速器带动负载正转，即 φ_2 增大，当 φ_2 增大到 φ_1 时， U_s 为零，电机停转，系统处于新的平衡状态；反之若 φ_1 减小，则 U_s 为负，负载反转即 φ_2 减小直到等于 φ_1 。另外，电机 SM 的转速，又通过测速电机的输出 U_e 反馈到 U_s 处并与之比较，即 $U_D = k(U_s - U_e)$ ，构成局部负反馈，用来改善系统的性能。整个系统的方框图如图 1-11 所示。

讨论：图 1-11 中将负载画在最外面，似乎负载特性对系统没有影响，这样理解是错误的。因电机的模型要考虑到负载效应，也就是说负载特性不同，会导致电机模型参数的改变，这是初学者易犯的错误。



图 1-11 随动控制系统方框图

例 1.4 图 1-12 为水温控制系统。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热，从而得到一定温度的热水。冷水流量的变化可用流量计测得。要求：

- (1) 说明系统为了保持热水温度为给定值，系统是如何工作的。
- (2) 指出系统的被控对象、给定输入量和输出量是什么，并说明冷水流量计作用。
- (3) 绘制系统的原理结构图。
- (4) 指出系统属于何种类型。

解 (1) 影响热水温度变化的因素，可能是流入的蒸汽(或冷水)的温度或压力变化，也可能是热交换器的隔热性能的变化。温度控制器将所测温度与设定温度进行比较，并相应地调节蒸汽阀门的开度大小；当热水温度变低时，将阀门的开度调大，加大蒸汽流入量使热水温度提高；反之，因某种原因而变化，热水温度变高时，将阀门的开度调小，减小蒸汽的流入量使热水温度降低，从而保持热水具有一定温度。

(2) 被控对象是热交换器，热交换器包含装水容器，以及容器内的蒸汽管道和流入的蒸汽及冷水。需注意的是被控对象不仅仅是流入的冷水；因为流出的热水温度是在装水容

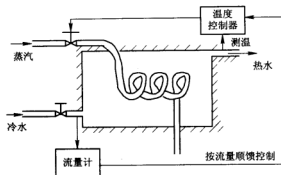


图 1-12 水温控制系统

器和容器内的蒸汽管道及蒸汽的物理特性一定的情况下，才取决于流入的蒸汽和冷水的物理特性。

给定输入是温度控制器中人为设定的期望值，而不是流入的蒸汽和冷水。输出量是流出的热水温度，而不是热水本身，热水本身还包含其它物理量，如流量、压力等。

冷水流量计测量冷水流量并顺馈到温度控制器。当冷水流量增大时，温度控制器应适当开大蒸汽阀门；反之，应减小蒸汽阀开度。

(3) 本系统的原理结构图如图 1-13 所示。

(4) 本系统为复合控制系统。



图 1-13 水温系统结构图

1.7 习 题

1.1 试回答下列问题：

- (1) 什么是开环控制、闭环控制和复合控制？它们各有什么特点？
- (2) 什么叫正反馈？什么叫负反馈？怎样判断反馈的极性？
- (3) 从功能分，闭环控制系统由哪些基本环节组成？它们各起什么作用？
- (4) 什么叫无静差系统？什么叫有静差系统？分别举例予以说明。

1.2 分析图 1-14 所示温度控制系统的工作原理，并画出结构图。（图中加热丝电源的闭合和断开是由接触式水银温度计 T 进行控制的。）

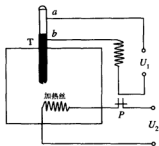


图 1-14

1.3 画出图 1-15 所示的自动门开闭系统的方框图，指出输入量的特点和电位器 B 的作用。

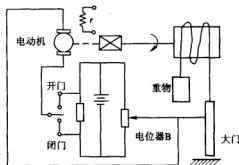


图 1-15

1.4 如图 1-16 所示为位置随动系统，其中各参数如图上所示。设 $U_r = \beta \theta_r$, $U_f = \beta \theta_0$ ，其中 θ_r 、 θ_0 分别为位置给定电位器及反馈电位器的转角。如果电机绕组的电感很小可忽略不计，且不计负载及摩擦的影响。试绘制系统结构图。

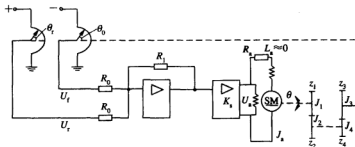


图 1-16

第2章 控制系统的数学模型

2.1 本章要求

- (1) 能利用其它专业知识建立简单的物理系统的数学模型(微分方程)。
- (2) 熟练运用方框图变换化简方法获得系统的传递函数(这是本章的重点)。
- (3) 掌握应用梅逊公式法求系统的传递函数。

2.2 系统的数学模型

数学模型是对实际系统的一种数学抽象。在经典控制理论中,所给出的数学模型是一种外部描述,即这种数学描述仅反映被控量和输入量之间的关系;另外一种数学模型是内部描述形式,它不仅反映被控量和输入量之间的关系,而且反映系统内部变量之间以及与被控量和输入量之间的关系。外部描述模型所反映的系统信息要比内部描述模型全面。

这里的数学模型是在一定的条件下既反映了实际物理过程的本质特征又忽略了许多次要因素而建立起来的,是一种形式简单,便于应用控制理论分析和设计系统的数学描述。所以,这里的数学模型在实际应用中一定要遵守其自身的约束条件,否则,用这类的数学模型会得出错误的结论。

本书所讨论的数学模型主要是针对线性定常系统,它的数学模型主要有微分方程和传递函数。所谓的线性定常系统是指其数学模型的微分方程是线性定常的。线性系统的重要特征是可以应用叠加原理,而非线性系统是不能应用叠加原理的。

为能简明直观地了解系统各环节(部分)之间的联系和信息传递过程,并且能比较便捷地求出系统的数学模型,通常采用方框图和信号流程图的研究方法,这就是本章要介绍的重点内容。

1. 系统的微分方程

系统的微分方程是描述控制系统动态性能的一种数学模型。建立系统或元件微分方程的一般步骤如下:

- (1) 根据实际工作情况,确定系统和各元件的输入量及输出量。
- (2) 根据物理或化学定律,注意负载效应,列出系统各组成元件的原始方程。
- (3) 在可能条件下,对各元件的原始方程进行适当的简化,略去一些次要因素或进行线性化处理。

(4) 从系统输入端开始,依照信号传递顺序,在所有元件的方程中消去中间变量,最后得到描述系统输入和输出关系的微分方程。

- (5) 对求出的系统微分方程进行标准化处理,即将与输出有关的各项放在等式左侧,

而将与输入有关的各项放在等式右侧;等式两侧各项均按降幂形式排列,并将各项系数归化为具有一定物理意义的形式。

线性定常系统或元件的微分方程的标准形式如下:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

式中, $r(t)$ 为输入量, $c(t)$ 为输出量;在实际系统中,系数 a_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 和 b_j ($j=1, 2, \cdots, m$) 均为实数,并且一般有 $n \geq m$ 。

2. 系统的传递函数

对于线性定常系统,将其微分方程用拉普拉斯变换后,则可求得系统的传递函数——在零初始条件下,系统或环节的输出的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。传递函数仅与系统或元件的结构和参数有关,而与外界输入、干扰及初始条件无关。它只对线性定常系统有定义。从(2-1)式即可得到传递函数的 $G(s)$ 有理分式表达式:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_n s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (n \geq m) \quad (2-2)$$

传递函数的零极点表达式为:

$$G(s) = K_g \frac{\prod_{j=1}^n (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (2-3)$$

式中, z_j 为传递函数零点, p_i 为传递函数极点, K_g 为传递函数增益;当 $G(s)$ 是开环传递函数时, K_g 为系统的根轨迹增益。

传递函数的时间常数表达式为:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^n (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \quad (2-4)$$

式中, τ_j 为微分时间常数, T_i 为惯性时间常数, K 为传递函数的稳态增益;当 $G(s)$ 是开环传递函数时, K 为系统的开环增益。

由(2-3)式和(2-4)式可得:

$$K = K_g \frac{\prod_{j=1}^n z_j}{\prod_{i=1}^n p_i}$$

2.3 典型环节的数学模型

对于复杂的控制系统,一般不能直接获得其输入/输出关系的数学模型。但无论多么复杂的系统都可分解为具有特定功能的若干部分(块),将块称为环节;块之间按信号传递

规律有序地连接。撇开环节的具体物理概念,只研究其运动规律和在一定条件下数学模型的共性,就可以将其划分成为数不多的几种典型环节。

典型环节的概念对系统建模、分析和研究很有用,但应特别强调指出,这些典型环节的数学模型都是对各物理系统的机理和特性的高度理想化之后的结果,它不仅形式简单,能够适合于控制理论的应用,更重要的是,在一定的条件下,它能较准确地描述那些物理过程的本质特征。

- | | |
|---|---------------------------------|
| (1) 比例环节: $G(s) = K$ | (2) 积分环节: $G(s) = 1/s$ |
| (3) 微分环节: $G(s) = s$ | (4) 比例微分环节: $G(s) = \tau s + 1$ |
| (5) 惯性环节: $G(s) = 1/(Ts + 1)$ | (6) 纯滞后环节: $G(s) = e^{-\sigma}$ |
| (7) 振荡环节: $G(s) = 1/(\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1) = \omega^2/(s^2 + 2\xi \omega s + \omega^2)$ | |

2.4 传递函数与脉冲响应

当系统输入为单位脉冲函数时(即 $R(s) = 1$),系统的输出响应称为系统的单位脉冲响应。

由于 $C(s) = G(s)R(s)$, 当 $R(s) = 1$ 时, 则有 $C(s) = G(s)$ 。

由上式的拉氏反变换, 得 $c(t) = g(t) = L^{-1}G(s)$ 。

故有, 系统传递函数的拉氏反变换为单位脉冲响应; 反之, 系统单位脉冲响应的拉氏变换为系统的传递函数。

当系统的脉冲响应 $g(t)$ 已知时, 任意输入 $r(t)$ 的输出响应 $c(t)$ 就可由如下卷积公式求得:

$$c(t) = \int_0^t r(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)r(t-\tau)d\tau = r(t) * g(t) = g(t) * r(t) \quad (2-5)$$

式中, $*$ 为卷积符号。

2.5 方框图与信号流程图

1. 方框图

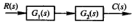

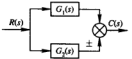







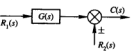









系统方框图是指将系统中各环节用一方框表示, 通常方框图由(有向)信号线、引出点(测量点、分支点)和比较点(综合点)组成。

各环节之间有三种基本联接:

- (1) 串联联接: 其特点是前一环节的输出信号为后一环节的输入信号。
- (2) 并联联接: 其特点是各环节的输入信号相同, 而输出为各环节输出的代数和。
- (3) 反馈联接: 其特点是将系统或环节的输出信号反馈到输入端, 并与输入信号相比较。

当系统方框图很复杂时, 为了便于利用上述三种基本联接形式, 需要对方框图进行变换和简化。方框图的运算和变换法则见表 2.1。在变换过程中, 应注意保持变换前后信号的“等效性”。

表 2.1 方框图的变换

	变 换 前	变 换 后	等 效 关 系
串联			$G(s) = G_1(s)G_2(s)$
并联			$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$
反馈			$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$
分支点 前移			$C(s) = G(s)R(s)$
分支点 后移			$C(s) = G(s)R(s)$
比较点 前移			$C(s) = G(s)R_1(s) \pm R_2(s)$
比较点 后移			$C(s) = G(s)[R_1(s) \pm R_2(s)]$
比较点 变位			$C(s) = R_1(s) \pm R_2(s) \pm R_3(s)$
比较点 与分支 点交换			$C(s) = R_1(s) \pm R_2(s)$
负号 移位			$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

2. 信号流程图

信号流程图是一种表达线性代数方程组结构的图，它由节点和支路组成。每一节点表示一个变量，每一支路是连接两个节点的定向线段并有一定的支路增益。

信号流程图可以根据系统微分方程绘制，也可以根据系统方框图变换得到。要注意的是方框图中的负反馈通道的传递函数要用负支路增益来表示，每个节点仅表示一个变量，节点起到方框图中的比较点的作用。

为便于描述信号流程图特征，常采用以下名词术语：

- (1) 源节点(输入节点)：只有输出支路的节点；
- (2) 阱节点(输出节点)：只有输入支路的节点；
- (3) 混合节点：既有输入支路，又有输出支路的节点；
- (4) 前向通路：沿信号流向从源节点到阱节点的通路且其所通过的节点仅相交一次；
- (5) 回路：起于并终于同一节点，且与其它节点相交不多于一次的闭合通路；
- (6) 不接触回路：相互之间无公共节点的回路。

设 P 为任意的源节点和阱节点之间的传递函数，则梅逊公式如下：

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k \quad (2-6)$$

式中， n 为前向通路的总数， P_k 为 n 条前向通路之中第 k 条前向通路的增益， Δ 为信号流程图的特征式， Δ_k 为信号流程图的特征式 Δ 的余因式，即为与第 k 条前向通路不接触部分的 Δ 值， Δ 具体表示为下式：

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots + (-1)^m \sum L_m \quad (2-7)$$

式中， $\sum L_1$ 为所有单独回路增益之和， $\sum L_2$ 为所有两个互不接触回路增益的乘积之和， $\sum L_3$ 为所有三个互不接触回路增益的乘积之和， $\sum L_m$ 为所有 m 个互不接触回路增益的乘积之和。

当无 m_1 个互不接触回路时(即 $\sum L_{m_1} = 0$)，则有 $\sum L_{m_2} = 0 (m_2 > m_1)$ 。

由于信号流程图与系统结构图之间有相互对应关系，因此，梅逊公式可直接应用于系统结构图。由系统结构图转换为信号流程图较为简单，只要将输入量、输出量、分支点、比较点以及中间变量均改为节点，同时用标有传递函数的定向线段代替各环节的方框即可。不必区分比较点和分支点；有时可将相邻的比较点和分支点合并为一个节点。需注意的是：若分支点在比较点之后，可合并为一个节点；若分支点在比较点之前，不能合并为一个节点。

2.6 控制系统的传递函数

控制系统中经常应用下面五种形式的传递函数，参见图 2-1。

开环传递函数： $\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$

前向通路传递函数: $\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$

闭环传递函数: $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

反馈通道传递函数: $\frac{B(s)}{C(s)} = H(s)$

误差传递函数: $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$

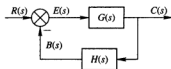


图 2-1 闭环结构图

要注意的是: 对于不符合图 2-1 所示形式的方框图, 求五种传递函数时要从五种传递函数的定义出发。

2.7 例题讲解

本章的习题主要有三种形式:

(1) 已知简单的物理系统求其数学模型(微分方程)。

(2) 利用方框图变换方法获得系统的传递函数。该方法的关键是点的移动问题, 尤为需要注意的是点在移动前和移动后要紧靠所跨过的环节, 也就是移动前或后, 被移动点与所跨过的环节之间没有其它点; 另外, 相邻的比较点和分支点的前后次序不能互换, 参见图 2-2。有时按表 2.1 所示的方法, 可能无法将系统简化为三种基本连接, 这时需要根据移动前后的“等效性”原则进行点的移动, 详见例 2-1 的方法一中的第 2 步。

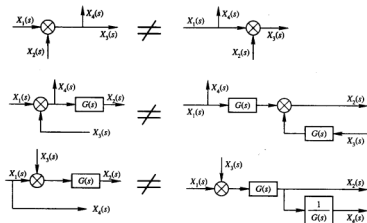


图 2-2 错误的移动

(3) 应用梅逊公式求系统的传递函数。该方法的关键是要找全所有前向通路和所有的回环, 否则得不到正确的结论。

例 2.1 控制系统的方框图如图 2-3 所示, 试求 $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。

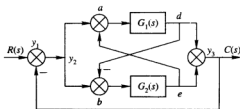


图 2-3

解 方法一：利用结构图化简方法。

分析：由图 2-3 可知：

(1) $G_1(s)$ 前的比较点 a 后移或 $G_1(s)$ 后的分支点 d 前移都不能将图 2-3 简化成三种基本连接形式(串联、并联和负反馈)； $G_2(s)$ 前或后点的移动也是如此，见图 2-4(a)。注意： $G_1(s)$ 前的比较点 a 后移必须紧靠 $G_1(s)$ ，不能跨过 $G_1(s)$ 后面的分支点 d ；此时若再利用表 2.1 中的移动法则，不能继续化简下去。

(2) 这时就可利用“等效性”原则，从图 2-4(a)可见 $x_3 = x_1 + x_2$ 。若将 d 点去掉上面通道不产生影响，而对于 $G_2(s)$ 前的比较点 b 输入 x_3 信号有影响，可利用式 $x_3 = x_1 + x_2$ ，将 d 点去掉，并分别将信号 x_1 和信号 x_2 输入到比较点 b ，这就是在图 2-4(b)中利用“等效性”原则使 $G_2(s)$ 前的比较点 b 的输入信号 x_3 不变，见图 2-4(b)。

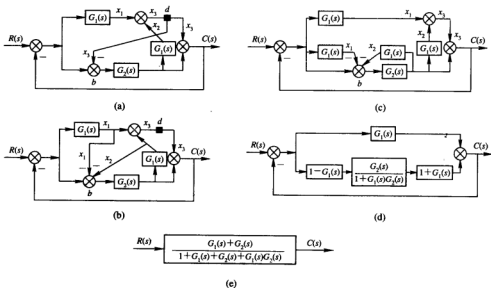


图 2-4

(3) 在不改变进入 $G_2(s)$ 前的比较点信号 x_1 和信号 x_2 的情况下，多画两个 $G_1(s)$ 环节。将图 2-4(b)重新绘制，如图 2-4(c)所示。

(4) 根据三种基本连接, 将图 2-4(c) 简化为图 2-4(d)。最后简化为图 2-4(e)。

方法二: 利用梅逊公式方法。

分析: 首先, 将系统结构图 2-3 化为信号流程图。在画信号流程图时, 要注意相邻的分支点和比较点的前后关系, 分支点在后可合并为一个点(如比较点 y_1 和分支点 y_2 可合并), 否则不能并为一个点(如分支点 d 或 e 不能与比较点 y_3 合并), 见图 2-5。当然, 在比较熟悉信号流程图时, 可在系统结构图 2-3 上直接运用梅逊公式, 省略转化为信号流程图的过程。

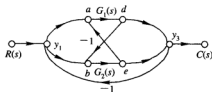


图 2-5 信号流程图

其次, 寻找出所有的前向通路。可按下述方法: 从输入节点出发($R(s)$), 沿有箭头的方向到下一节点(y_1); 再从该节点出发(如 y_1 点), 沿箭头方向到下一节点(如 a 点或 b 点)。若该节点与前面所经过的节点相同, 则结束该通路且该通路无效(如图 2-6 中虚线所指情况); 若该节点与前面所经过的节点不同, 再从该节点如此下去, 直到节点为输出节点($C(s)$), 形成一条前向通路结束。若从中间某节点出发有几个分支(如 y_1 分两支 a 和 b), 则可能形成多个前向通路, 先沿第一个分支, 按前述过程处理, 再处理下一分支。按该方法, 可找出所有的前向通路, 不会出现漏找。见图 2-6。当然在比较熟练的情况下, 可根据图直接找出所有的前向通路, 但易出现漏找。本题共有四条前向通路。

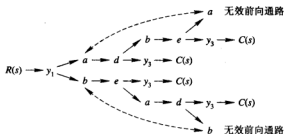


图 2-6 前向通路

最后, 找出所有的回环。具体方法类似于找前向通路, 从输入节点出发($R(s)$), 沿有箭头的方向到下一节点(y_1); 再从该节点出发(如 y_1 点), 沿箭头方向到下一节点(如 a 点或 b 点)。若该节点与前面所经过的某节点相同, 则结束并形成回环(如图 2-6 中虚线所指情况); 若该节点与前面所经过的节点不相同, 再从该节点如此下去, 直到出现与前面所经过的某节点相同, 形成一个回环结束。若从中间某节点出发有几个分支(如 y_1 分两支 a 和 b), 则可能形成多个回环, 先沿第一个分支, 按前述过程处理, 再处理下一分支。按该方法, 可找出所有的回环, 不会出现漏找。见图 2-7。当然在比较熟练的情况下, 可根据图直接找出所有的回环, 但这样易出现漏找。注意: 图中虚线所指的两个回环其实是一个回环, 该方法可能找重。本题共有五个回环。

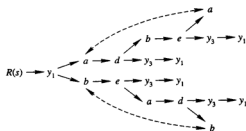


图 2-7 回环

四条前向通路增益为：

$$P_1 = G_1(s), P_2 = G_2(s), P_3 = -G_1(s)G_2(s), P_4 = G_1(s)G_2(s)$$

五个回环增益为：

$$L_1 = -G_1(s), L_2 = -G_2(s), L_3 = -G_1(s)G_2(s), L_4 = G_1(s)G_2(s),$$

$$L_5 = -G_1(s)G_2(s)$$

本系统无两个及其以上的互不接触的回环。因而

$$\Delta(s) = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 = 1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)$$

又有

$$\Delta_1(s) = \Delta_2(s) = \Delta_3(s) = \Delta_4(s) = 1$$

代入梅逊公式得：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

方法三：利用代数方法。

分析：代数方法就是根据系统结构图中变量之间的关系，建立中间变量之间、输入变量与中间变量之间以及输出变量与中间变量之间的一组代数方程，然后解代数方程组，求出输入变量与输出变量之间的关系；也可求出输入变量与中间变量、中间变量之间以及中间变量与输出变量的关系。本题根据图 2-3 或图 2-5 可得如下组方程：

$$Y_1(s) = Y_2(s) = R(s) - C(s) \quad D(s) = G_1(s)[Y_2(s) - E(s)]$$

$$E(s) = G_2(s)[Y_2(s) - D(s)] \quad C(s) = Y_3(s) = D(s) + E(s)$$

消去中间变量得：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

例 2.2 已知给定系统的结构图如图 2-8 所示。试求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 、 $C(s)/E(s)$ 。

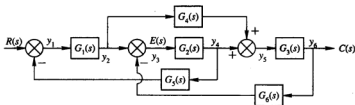


图 2-8

解 方法一：利用梅逊公式方法。

信号流程图见图 2-9。可将通路和回环的分析合并在一起进行分析，例 2.1 图 2-6 中无效前向通路实际上形成了回环。本题分析结果见图 2-10，有二条前向通道，三个回环，回环 2 和回环 4 为相同回环。对于求 $C(s)/E(s)$ ，可先求出 $E(s)/R(s)$ ，此时前向通路的终点为 $E(s)$ 即 y_3 ，也有二条前向通道，见图 2-11，而回环仍为原系统的回环，见图 2-10。再利用下式求之：

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{C(s)/R(s)}{E(s)/R(s)}$$

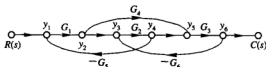


图 2-9 信号流程图

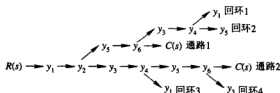


图 2-10 前向通路和回环

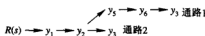


图 2-11 前向通路

两条前向通道增益分别为：

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s), P_2 = G_1(s)G_4(s)G_5(s)$$

三个回环增益分别为：

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)G_3(s), L_2 = -G_2(s)G_3(s)G_6(s)$$

$$L_3 = G_1(s)G_4(s)G_3(s)G_6(s)G_2(s)G_5(s)$$

不存在互不接触的回环。

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3$$

$$= 1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_2(s)G_3(s)G_6(s) - G_1(s)G_4(s)G_3(s)G_6(s)G_2(s)G_5(s)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$$

则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2)$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_4(s)G_5(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s) + G_2(s)G_3(s)G_6(s) - G_1(s)G_4(s)G_3(s)G_6(s)G_2(s)G_5(s)}$$

对于 $E(s)$ ，也有两条前向通道，其增益分别为：

$$P'_1 = G_1, \quad P'_2 = -G_1 G_4 G_5 G_6 \text{ 且 } \Delta'_1 = \Delta'_2 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{\Delta} (P'_1 \Delta'_1 + P'_2 \Delta'_2) \\ &= \frac{G_1(s) - G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_5(s) + G_2(s)G_5(s)G_6(s) - G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_2(s)G_5(s)} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{E(s)} &= \frac{C(s)/R(s)}{E(s)/R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_5(s) + G_1(s)G_4(s)G_5(s)}{G_1(s) - G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)} \\ &= \frac{G_2(s)G_5(s) + G_4(s)G_5(s)}{1 - G_4(s)G_5(s)G_6(s)} \end{aligned}$$

方法二：结构图化简方法。

分析：仅通过点的移动，不能简化为三种基本连接。根据“等效性”原则，利用式 $Y_4 = G_2 E = G_2 Y_3 = G_2 Y_2 - G_2 G_5 Y_6$ ，将图 2-8 简化为图 2-12(a)，重新整理得图 2-12(b)、(c)和(d)。

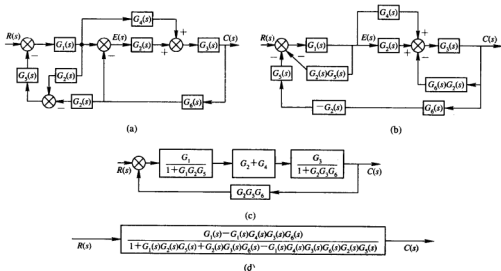


图 2-12

由图 2-12 得：

$$E = (R + C G_2 G_5 G_6) \frac{G_1}{1 + G_2 G_5 G_6} - C G_6,$$

$$E = R \left[(1 + \Phi G_2 G_5 G_6) \frac{G_1}{1 + G_2 G_5 G_6} - \Phi G_6 \right]$$

$$\frac{E}{R} = (1 + \Phi G_2 G_5 G_6) \frac{G_1}{1 + G_2 G_5 G_6} - \Phi G_6 = \frac{G_1 - \Phi G_6}{1 + G_2 G_5 G_6}$$

$$= \frac{G_1(s) - G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_5(s) + G_2(s)G_5(s)G_6(s) - G_1(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_2(s)G_5(s)}$$

例 2.3 如图 2-13 所示信号流程图, 求增益 y_6/y_1 , y_3/y_1 及 y_5/y_2 。

解 本系统有两条前向通道(y_1 到 y_6), 四个回环, 见图 2-14。其中回环 4 和回环 5 为同一个回环, 回环 1 和回环 4 互不接触, 四个回环的增益分别为: $L_1 = -cg$, $L_2 = -cdei$, $L_3 = -bei$, $L_4 = -eh$ 。有一组两个互不接触的回环(回环 1 和回环 4), 其增益为 $L_1 L_4 = cgeh$, 则系统的特征多项式为:

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_2 = 1 + cg + cdei + bei + eh + cgeh$$

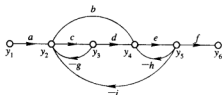


图 2-13

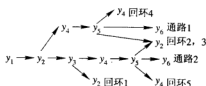


图 2-14

(1) 求: y_6/y_1 :

y_1 到 y_6 有两条前向通道, 增益分别为, $P_1 = acdef$, $P_2 = abef$, 并有 $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, 则有:

$$\frac{y_6}{y_1} = \frac{acdef + abef}{\Delta}$$

(2) 求 y_3/y_1 :

y_1 到 y_3 有一条前向通道, 见图 2-14, 增益为 $P_1 = ac$, 并有 $\Delta_1 = 1 + eh$ (回环 1 与前向通道不接触), 则有:

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{ac(1+eh)}{\Delta}$$

(3) 求 y_5/y_2 :

梅逊公式只适用求输出(或中间变量)对输入的增益。现在 y_2 不是输入节点, 而是混合节点, 就不能直接应用梅逊公式求解。为求 y_5/y_2 , 先应用梅逊公式分别求 y_5/y_1 及 y_2/y_1 , 则有 $\frac{y_5}{y_1} = \frac{acde + abe}{\Delta}$, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{a(1+eh)}{\Delta}$, 所以 $\frac{y_5}{y_2} = \frac{y_5/y_1}{y_2/y_1} = \frac{cde + be}{1+eh}$ 。

例 2.4 试求图 2-15 所示系统输出 $C_1(s)$ 和 $C_2(s)$ 的表达式, 以及传递函数的矩阵表达式。

解 从 R_1 到 C_1 , R_1 到 C_2 , R_2 到 C_1 和 R_2 到 C_2 的通路以及回环情况见图 2-16。同一系统回环情况不变, 因而图 2-17(b)中的回环是图 2-17(a)中的重复。

图 2-16(a)中, 回环 2 和 7 为同一回环, 1 和 8 也为同一回环, 因而, 回环总数为 6 个, 其增益分别为:

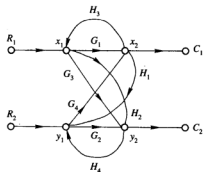


图 2-15

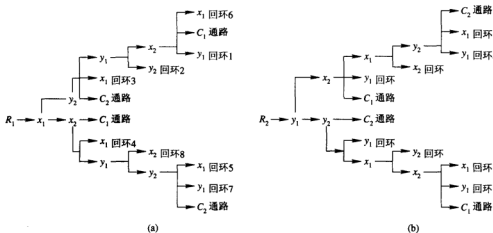


图 2-16

$$L_1 = H_1 G_1 L_2 = H_1 G_2, L_3 = H_2 G_3, L_4 = H_3 G_1, L_5 = G_1 H_1 G_2 H_2, L_6 = H_3 G_4 G_3 H_4$$

回环 1 和回环 3 不接触, $L_1 L_3 = H_1 H_2 G_3 G_4$ 。

回环 1 和回环 4 不接触, $L_1 L_4 = H_1 H_3 G_1 G_4$ 。

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^6 L_i + (L_1 L_3 + L_1 L_4)$$

$$= 1 - H_1 G_4 - H_4 G_2 - H_2 G_3 - H_3 G_1 - H_1 H_2 G_1 G_2 - H_3 G_4 H_4 G_3 \\ + H_1 H_2 G_3 G_4 + H_1 H_3 G_1 G_4$$

(1) 求 $P_1 = G_1$, $P_2 = G_3 H_4 G_4$, $C_1(s)$ 的表达式:

$R_1 \rightarrow C_1$ 有两条前向通路, 见图 2-16(a)。 $P_1 = G_1$, $P_2 = G_3 H_4 G_4$ 。

因为 P_1 与回环 2 不接触, P_2 与所有回环接触

$$\text{所以} \quad \Delta_1 = 1 - L_2 = 1 - H_4 G_2, \Delta_2 = 1$$

$R_2 \rightarrow C_1$ 也有两条前向通路, 见图 2-16(b)。 $P_3 = G_4$, $P_4 = G_2 H_2 G_1$ 。

因为 P_3 与回环 3 不接触, P_4 与所有回环接触

$$\text{所以} \quad \Delta_3 = 1 - L_3 = 1 - H_2 G_3, \Delta_4 = 1$$

根据梅逊公式和叠加原理, 可得:

$$C_1(s) = \frac{1}{\Delta} [(P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2) R_1 + (P_3 \Delta_3 + P_4 \Delta_4) R_2] \\ = \frac{1}{\Delta} [(G_1 - G_1 G_2 H_4 + G_3 G_4 H_4) R_1 + (G_4 - G_2 G_4 H_2 + G_1 G_2 H_1) R_2] \\ = \frac{1}{\Delta} [A \cdot R_1(s) + B \cdot R_2(s)]$$

(2) 求 $C_2(s)$ 的表达式:

从 R_1 到 C_2 的前向通道有两条, 其增益和余因子分别为:

$$P'_1 = G_3, \Delta'_1 = 1 - H_1 G_4; P'_2 = G_1 H_1 G_2, \Delta'_2 = 1$$

同理可得：

$$\begin{aligned} C_2(s) &= \frac{1}{\Delta} [(P'_1 \Delta'_1 + P'_2 \Delta'_2) R_1 + (P'_3 \Delta'_3 + P'_4 \Delta'_4) R_2] \\ &= \frac{1}{\Delta} [(G_3 - G_3 G_4 H_1 + G_1 H_1 G_2) R_1 + (G_2 - G_2 G_1 H_3 + G_4 H_3 G_3) R_2] \\ &= \frac{1}{\Delta} [C \cdot R_1(s) + D \cdot R_2(s)] \end{aligned}$$

(3) 求传递函数矩阵：

$$\text{根据：} C_1(s) = \frac{A}{\Delta} R_1(s) + \frac{B}{\Delta} R_2(s) \quad C_2(s) = \frac{C}{\Delta} R_1(s) + \frac{D}{\Delta} R_2(s)$$

$$\text{写成矩阵形式：} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以传递函数矩阵为：} G(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

例 2.5 已知系统结构图如图 2-17 所示，分别求出传递函数： $C_1(s)/R_1(s)$ ， $C_1(s)/R_2(s)$ 。

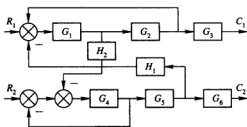


图 2-17

解 将 G_1 输出端分支点后移，并进行反馈运算得图 2-18。

(1) 求 $C_1(s)/R_1(s)$ ：

此时可令 $R_2(s)=0$ ，图 2-18 简化为图 2-19。此时可将 C_2 输出支路去掉。

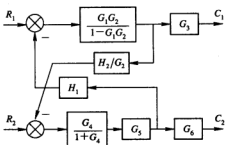


图 2-18

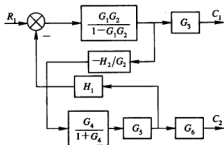


图 2-19

则

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{R_1} &= \frac{\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2}}{1 + \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2} \cdot H_1 \cdot \frac{G_4 G_2}{1 + G_4} \cdot \left(\frac{-H_2}{G_2} \right)} \cdot G_3 \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_4 - G_1 G_2 - G_1 G_2 G_4 + G_1 G_4 G_2 H_1 H_2} \end{aligned}$$

(2) 求 $C_1(s)/R_2(s)$:

此时可令 $R_1(s)=0$, 图 2-18 可简化为图 2-20(a)。此时可将 C_2 输出支路去掉。

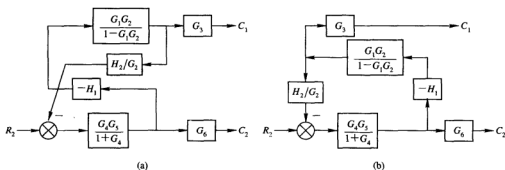


图 2-20

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{C_1}{R_2} &= \frac{\frac{G_4 G_5}{1 + G_4} \cdot (-H_1) \cdot \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_4}}{1 + \frac{G_4 G_5}{1 + G_4} \cdot (-H_1) \cdot \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_4} \cdot \frac{H_2}{G_4}} \cdot G_3 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 G_4} \\ &= G_3(s) G_1 G_4 X_o(s) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 - G_1 G_2 G_4 G_3 G_6}{1 + G_4 - G_1 G_2 - G_1 G_2 G_4 + G_1 G_4 G_2 H_1 H_2} \end{aligned}$$

例 2.6 设系统由下列拉氏变换的关系方程组所描述。试由该方程组画出系统的结构图, 并利用结构图化简求系统传递函数 $X_o(s)/X_i(s)$ 。

$$\begin{aligned} X_1(s) &= X_i(s) - X_4(s) & X_2(s) &= X_1(s) G_1(s) \\ X_3(s) &= X_2(s) - X_o(s) G_4(s) & X_4(s) &= X_3(s) G_2(s) \\ X_o(s) &= X_4(s) G_3(s) \end{aligned}$$

解 本题是要求由变量间的关系方程组画出系统结构图, 然后用结构图化简方法求解 $X_o(s)/X_i(s)$ 。首先由 $X_o(s)/X_i(s)$ 可确定结构图中输入量为 $X_i(s)$, 输出量为 $X_o(s)$ 。其次根据方程组可知, 等式左边为中间变量, 若右边为加(+)或减(-)组成, 则左边的中间变量为比较器输出; 若右边为乘积, 则左边的中间变量为通过某环节的输出。最后, 由方程组绘出结构图如图 2-21 所示, 化简过程如图 2-22 所示。

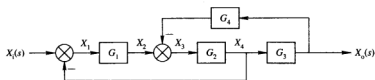


图 2-21

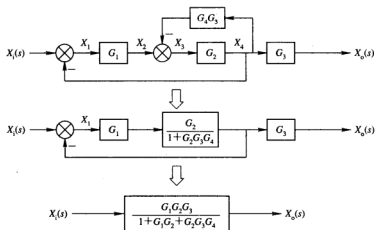


图 2-22

例 2.7 由图 2-23 系统的结构图求 $C(s)/R(s)$, $C(s)/N(s)$ 。(用结构图等效变换方法求解)

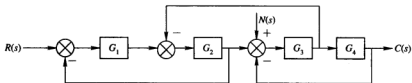


图 2-23

解 本题为多输入情况下求传递函数的问题。对于线性系统，在求 $C(s)/R(s)$ 时，可令 $N(s)=0$ ，反之求 $C(s)/N(s)$ 时，可令 $R(s)=0$ 。系统输出应为 $R(s)$ 和 $N(s)$ 共同作用下的输出量

$$C(s) = \frac{C(s)}{N(s)} \cdot N(s) + \frac{C(s)}{R(s)} \cdot R(s)$$

将 G_3 后的分支点移到 G_4 后，同时将 G_1 后的比较点前移，则图 2-23 简化为图 2-24 和图 2-25。

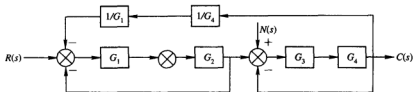


图 2-24

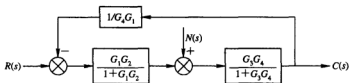


图 2-25

求 $C(s)/R(s)$ 时图为 2-26, 求 $C(s)/N(s)$ 时图为 2-27。令

$$\Delta = 1 + G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_4$$

则
$$C(s) = \frac{1}{\Delta} [G_1G_2G_3G_4R(s) + G_3G_4(1 + G_1G_2)N(s)]$$

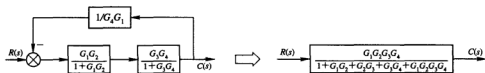


图 2-26

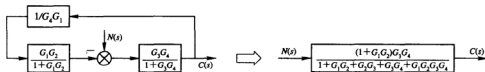


图 2-27

例 2.8 已知某单位反馈控制系统, 在零初始条件下的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$, 试求:

- (1) 系统的传递函数和脉冲响应;
- (2) 若初始条件 $c(0) = 0$, $\dot{c}(0) = -2$, 求在单位阶跃下的响应。

解 对于该类问题, 主要考的是拉氏变换的有关性质和应用条件。

- (1) 方法一: 对式 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$, 求拉氏变换得:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

因为输入为单位阶跃函数, 则 $R(s) = \frac{1}{s}$, 故传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

脉冲响应为 $g(t) = L^{-1}[G(s)] = \delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}$ (注意 $\delta(t)$ 不能漏掉)

方法二: 对式 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$ 求导, 得单位脉冲响应 $g(t) = c'(t) = \delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}$ 对 $g(t)$ 求拉氏变换得

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

(2) 系统的输出由两部分组成: 零状态响应即零初始条件下的响应, 可由 $L^{-1}[G(s)R(s)]$ 求得, 即本题已知的 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$; 另一部分为零输入响应, 即非零初始条件所产生的响应, 它不能由传递函数求出。

从已求出的 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$ 可得:

$$s^2 C(s) + 3s C(s) + 2C(s) = s^2 R(s) + 4s R(s) + 2R(s)$$

上式为零状态的拉氏变换, 将左边的非零状态添加后可得:

$$[s^2 C(s) - s C(0) - \dot{C}(0)] + 3[s C(s) - C(0)] + 2C(s) = s^2 R(s) + 4s R(s) + 2R(s)$$

解得:

$$C(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s^2 + 3s + 2} R(s) + \frac{[s C(0) + \dot{C}(0)] + 3C(0)}{s^2 + 3s + 2}$$

上式右边的第一项为零状态响应, 第二项为零输入响应。由表达式可知, 第二项分母与 $G(s)$ 分母相同, 分子由两项组成, 且系数为分母中含 s 项的系数, 将 s^2 用 $s C(0) + \dot{C}(0)$, s 用 $C(0)$ 代替所得, 一般情况均如此; 若分母中有 s^3 , 则分子中有三项, 每项系数分别为分母中含对应 s 项的系数, 将 s^3 用 $s^2 C(0) + s \dot{C}(0) + \ddot{C}(0)$ 代替, 其它同上。将初始条件代入第二项可得 $C_2(s) = -\frac{2}{s^2 + 3s + 2}$ 。

所以

$$c_2(t) = L^{-1}[C_2(s)] = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

则

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) = 1 - e^{-t} + e^{-2t}$$

(注意, 若用上式按(1)中方法求系统 $G(s)$ 或 $g(t)$ 会得出错误的结果, 因上式 $c(t)$ 不是零状态响应。)

例 2.9 液压控制器的原理图如图 2-28 所示, 画出控制器的结构图, 并求传递函数 $Y(s)/E(s)$ 。(注: 液压伺服马达的传递函数为 K_1/s)

解 当阀向左移动时, 高压油从左端进入动力油缸, 推动动力活塞向右移动; 当阀向右移动时, 高压油从右端进入动力油缸, 推动动力活塞向左移动; 当阀位置居中时, 动力活塞将停止移动。因此阀的位移, 即 B 点的位移是该系统的比较点。当 A 点向右移动时, B 点也向右移, 高压油使 y 向左移动, 通过 C 点将 B 点拉回原来的中点, 堵住高压油, y 的运动也随之停下来。系统方框图如图 2-29 所示。

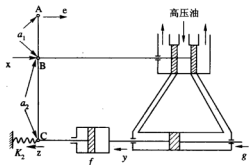


图 2-28

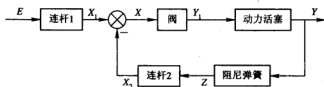


图 2-29

阀为比例环节: $\frac{Y_1(s)}{X(s)} = 1$

液压伺服马达: $\frac{Y(s)}{Y_1(s)} = \frac{K_1}{s}$

若 z 点不动, 则 e 点移动导致 x 的移动为 X_1 , $X_1(s) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} E(s)$

若 A 点不动, 则 z 点移动导致 x 的移动为 X_2 , $X_2(s) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} Z(s)$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} E(s) - \frac{a_1}{a_1 + a_2} Z(s)$$

z 点运动受阻尼和弹簧的作用, 有平衡方程:

$$K_2 z(t) + f \frac{d[z(t) - y(t)]}{dt} = 0$$

于是有

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{fs}{fs + K_2}$$

将以上各环节传递函数代入图 2-29 得系统结构图 2-30。

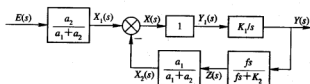


图 2-30

由图 2-30 可得:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{E(s)} &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{K_1/s}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{fs}{fs + K_2}} \\ &= \frac{a_2 K_1 (fs + K_2)}{s[(a_1 + a_2)fs + (a_1 + a_2)K_2 + a_1 fK_1]}\end{aligned}$$

例 2.10 试画出图 2-31 所示的系统方框图, 并求 $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$ 。设自整角机(角度同步误差检测器)和放大器的传递函数分别为 K_1 和 K_2 , 电机部分传递函数为 $\frac{C(s)}{E_s(s)} = \frac{K_3}{s(Ts + 1)}$, 测速电机传递函数为 $K_4 s$, 减速器的传动比为 $n = \frac{N_1}{N_2}$ 。

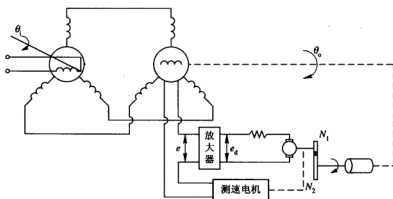


图 2-31

解 方框图如图 2-32 所示, 各环节的传递函数如图 2-33 所示。

$$\begin{aligned}\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} &= \frac{K_1 \cdot \left[\frac{K_2 K_3}{s(Ts + 1)} / \left(1 + \frac{K_2 K_3}{s(Ts + 1)} \cdot K_4 s \right) \right] \cdot n}{1 + K_1 \cdot \frac{\frac{K_2 K_3}{s(Ts + 1)}}{1 + \frac{K_2 K_3}{s(Ts + 1)} \cdot K_4 s} \cdot n} \\ &= \frac{K_1 K_2 K_3 n}{s(Ts + 1) + K_2 K_3 K_4 s + K_1 K_2 K_3 n}\end{aligned}$$

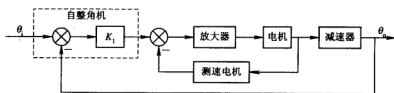


图 2-32

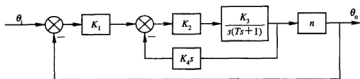


图 2-33

例 2.11 设一台生产过程设备由液容为 C_1 和 C_2 的两个液箱组成, 如图 2-34, 试确定输入量 q_1 与输出量 h_2 之间的微分方程。(提示: ① 流量 = 液容/液阻, 液箱的液容等于液箱的横截面积, 液阻 = 液面差变化/流量变化; ② 不考虑液箱的相互影响。)

解 $q_1 - q_2 = C_1 \frac{dh_1}{dt}$

$$q_2 = \frac{h_1}{R_1}$$

$$q_3 = \frac{h_2}{R_2}$$

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$\begin{cases} q_1 - q_2 = C_1 \frac{dh_1}{dt} = C_1 R_1 \frac{dq_2}{dt} \\ q_2 - \frac{h_2}{R_2} = C_2 \frac{dh_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(s) - q_2(s) = C_1 R_1 s q_2(s) \\ q_2(s) - \frac{1}{R_2} h_2(s) = C_2 s h_2(s) \end{cases}$$

对上式消去 $q_2(s)$, 可得:

$$q_1(s) = (1 + C_1 R_1 s) q_2(s) = (1 + C_1 R_1 s) \cdot \left[C_2 s + \frac{1}{R_2} \right] h_2(s)$$

所以

$$\frac{h_2(s)}{q_1(s)} = \frac{R_2}{(1 + C_1 R_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}$$

例 2.12 RC 网络如图 2-35 所示, 其中 u_1, u_2 分别为网络的输入量和输出量, 求: ① 画出网络相应的结构图; ② 求传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。

解 (1)
$$\begin{cases} U_1(s) = R_1 I_1(s) + [I_1(s) + I_2(s)] \frac{1}{C_2 s} \\ U_2(s) = R_2 I_2(s) + [I_1(s) + I_2(s)] \frac{1}{C_2 s} \\ I_1 R_1 = \left(R_2 + \frac{1}{C_1 s} \right) I_2 \end{cases}$$

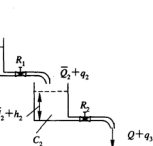


图 2-34

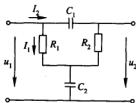


图 2-35

$$\text{则} \begin{cases} U_1 = I_2(s) \cdot \frac{1}{C_2 s} + \left(R_1 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_1(s) \\ U_2 = I_1(s) \cdot \frac{1}{C_2 s} + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2(s) \\ I_2 = \frac{I_1 R_1 C_1 s}{R_2 C_1 s + 1} \end{cases}$$

其结构图如图 2-36 所示。

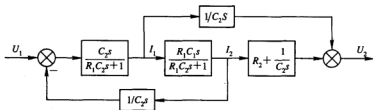


图 2-36

$$(2) \quad \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 + R_2) C_1 s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2) s + 1}$$

例 2.13 试求图 2-37 所示力学模型的传递函数，其中 $x_1(t)$ 为输入位移， $x_0(t)$ 为输出位移， k_1, k_2 为弹性刚度， f_1, f_2 为粘性阻尼系数。

解 粘性阻尼系数为 f 的阻尼器可等效为弹性刚度为 $f s$ 的弹性元件。并联弹簧的弹性刚度等于各弹簧弹性刚度之和，而串联弹簧的弹性刚度的倒数等于各弹簧弹性刚度倒数之和。因此图 2-37 所示系统的结构图可表示为图 2-38。则系统的传递函数为

$$\frac{x_0(t)}{x_1(t)} = \frac{\frac{f_1}{k_2} s}{\frac{f_1 f_2}{k_1 k_2} s^2 + \left(\frac{f_1}{k_1} + \frac{f_1}{k_2} + \frac{f_2}{k_2}\right) s + 1}$$

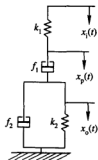


图 2-37

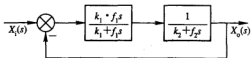


图 2-38

也可采用建立力的平衡方程的方法, 然后进行拉氏变换化简。平衡方程如下, 化简结果同上。其中 $x_p(t)$ 为中间变量。

$$k_2 x_o + f_2 \dot{x}_o = f_1 (\dot{x}_p - \dot{x}_o) = k_1 (x_i - x_p)$$

例 2.14 图 2-39 为单级倒立摆模型示意图。安装在小车上的动力 $u(t)$, 使摆保持在垂直位置。只考虑二维情况, 即认为摆只在图中所示的图面运动。为了保持上摆位于垂直位置, 连续地测量 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$, 形成控制力 $u(t)$, 使 $u(t) = M[a\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t)]$ 。

试确定使系统稳定的 a 、 b 值, 假设在摆轴和车轴上无摩擦, 并假设 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 很小。

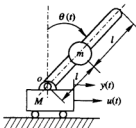


图 2-39



图 2-40

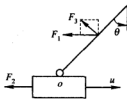


图 2-41

解 设 J_1 为上摆围绕质量中心的转动惯量, 且 $J_1 = ml^2/3$, 则上摆绕旋转中心 O 点的转动惯量为 $J = J_1 + ml^2$ 。

上摆受力情况见图 2-40 (O 点约束力未画)。其中, F_1 为上摆水平运动的惯性力, $F_1 = m\ddot{y}$; L_1 为上摆相对于 O 点的惯性转矩, $L_1 = J\ddot{\theta}$; mg 为重力。

则对 O 点的旋转平衡方程为

$$mg \sin\theta \cdot l = L_1 + F_1 \cos\theta \cdot l$$

代入 F_1 和 L_1 得

$$J\ddot{\theta} + m\ddot{y} \cos\theta \cdot l - mg \sin\theta \cdot l = 0$$

图 2-41 为模型整体与水平方向有关的受力图, 其中 F_2 为小车 M 的惯性力, $F_2 = M\ddot{y}$, F_3 为上摆旋转切线方向的惯性力, $F_3 = ml\ddot{\theta}$

则模型整体水平方向的力平衡方程为

$$F_1 + F_2 + F_3 \cos\theta = u$$

代入 F_1 、 F_2 和 F_3 得

$$ml\ddot{\theta} + (M+m)\ddot{y} = u$$

因 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 很小, 有 $\cos\theta \approx 1$ 和 $\sin\theta \approx \theta$ (线性化处理)

$$\text{则有} \begin{cases} mg \sin\theta \cdot l = L_1 + F_1 \cos\theta \cdot l \\ ml\ddot{\theta} + (M+m)\ddot{y} = u(t) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \end{cases}$$

$$u(t) = M[a\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t)] = u(t)$$

消去中间变量 $\ddot{y}(t)$ 和 $u(t)$ 得:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{3b}{4+m/M} \dot{\theta}(t) + \frac{3[a-(1+m/M)g]}{4+m/M} \theta(t) = 0$$

此为二阶系统，上式系数均为正时，则系统稳定

得 $b > 0$, $a > (1+m/M)g$

2.8 习 题

2.1 已知机电系统如图 2-42 所示，试画出系统的结构图，并求传递函数 $G(s) = X(s)/E(s)$ 。

(提示：设电磁线圈反电势 $e_b = K_1 \frac{dx}{dt}$ ，线圈电流 i_2 对衔铁产生的力 $F_0 = K_2 i_2$ 。)

2.2 一个简单的机械加速度计如图 2-43 所示，输入量为加速度 $u(t) = d^2x/dt^2$ ，输出为 $y(t)$ ，其中 $x(t)$ ， $y(t)$ 均是相对于惯性空间的位移量，求传递函数 $Y(s)/u(s)$ 。图中 B 为粘滞摩擦阻尼系数， K 为弹性系数。

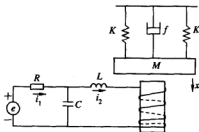


图 2-42

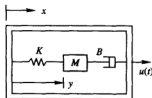


图 2-43

2.3 求下列函数的拉氏反变换。

$$(1) F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad (2) F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$(3) F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 1}{(s^2 + 1)s} \quad (4) F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$$

2.4 已知控制系统的传递函数如下，试求其单位脉冲响应 $c(t)$ 。

$$(1) G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5} \quad (2) G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10e^{-2s}}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)} \quad (4) G(s) = \frac{10(s^2 + s + 1)}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$(5) G(s) = \frac{10(s^2 + s + 1)}{(s+1)^2(s^2 + 2s + 5)}$$

2.5 已知某单位反馈控制系统的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 + 0.2e^{-40t} - 1.2e^{-10t}$ ，试求：

- (1) 系统的闭环传递函数；
- (2) 系统的单位脉冲响应。

2.6 已知某线性系统的脉冲响应 $c(t) = g(t) = 1 - e^{-t}$ ，试求取 $r(t) = 0.4t$ 时的斜坡响应 $c(t)$ 。

2.7 已知系统传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$ ，初始条件为 $c(0) = -1$ ， $\dot{c}(0) = 0$ ，试求阶跃输入作用 $r(t) = 1(t)$ 时，系统的输出响应 $c(t)$ 。

2.8 设控制系统如图 2-44(a) 所示，输入信号 $r(t)$ 的波形如图 2-44(b) 所示，分别在 $K = 1$ 和 $K = 10$ 时画出系统输出 $c(t)$ 的波形。

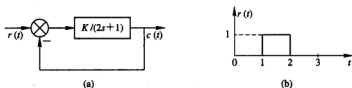


图 2-44

2.9 试简化图 2-45 所示系统的方框图为一个反馈回路的形式，并求 $C(s)/R(s)$ 。

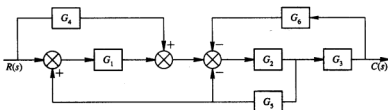


图 2-45

2.10 某系统的结构图如图 2-46 所示，试求系统误差传递函数 $E(s)/R(s)$ 。

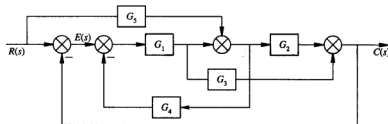


图 2-46

2.11 设复合控制如图 2-47 所示，

- (1) 求系统的开环传递函数；
- (2) 根据结构图画系统的信号流程图，并用梅逊公式求 $C(s)/N(s)$ ；
- (3) 为使输出 $C(s)$ 不受 $N(s)$ 的影响， $G_d(s)$ 应有怎样的传递函数？

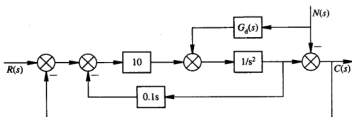


图 2-47

2.12 某系统结构如图 2-48 所示, 求 $C(s)/R(s)$ 。

2.13 二输入二输出系统的结构图如图 2-49 所示, 若以 $\begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$ 为输入向量, $\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix}$ 为输出向量, 求系统的传递函数矩阵。

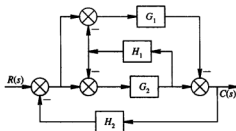


图 2-48

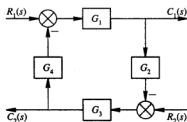


图 2-49

2.14 某系统的结构图如图 2-50 所示, 试求系统输出 $C(s)$ 。

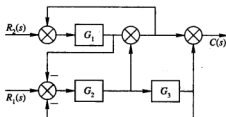


图 2-50

第3章 控制系统的时域分析法

3.1 本章要求

- (1) 掌握系统性能指标三方面的具体要求。
- (2) 熟悉暂态性能中超调量和调节时间的计算, 以及稳态性能中的稳态误差计算。
- (3) 熟练运用劳斯判据。劳斯判据(或赫尔维茨判据)仅适合系统闭环的特征方程是线性常系数的多项式方程, 若特征方程中包含有 e^{σ} 时, 不能直接运用该判据。

3.2 基本概念

1. 三方面要求

对于控制系统的总的要求是**稳定、快速、准确**。本章是在已知系统数学模型的基础上, 用时域分析方法去评价系统这三方面的具体性能和研究如何改善系统的品质指标。其主要内容是分析系统的**稳定性能、稳态性能及暂态性能**。其中, 首先要保证系统稳定, 因为不稳定的系统就不能正常工作, 也不存在其它两个性能指标。

2. 响应的构成

研究系统的运动规律就是分析系统的性能。时域分析就是分析系统的时间响应, 也就是分析描述其运动的微分方程(数学模型)解的特性。对于线性常微分方程的解, 其解的结构形式为:

线性常微分方程的通解 = 齐次方程的通解 + 非齐次方程的任一特解

用分析电网络的方法, 把电网络的稳态响应作为非齐次方程的任一特解, 于是响应的结构形式为:

网络的响应 = 暂态响应(暂态分量) + 稳态响应(稳态分量)

另外从电路分析知道, 还可得到系统的响应的另一种结构形式:

系统的响应 = 零状态响应 + 零输入响应

以上三种结构形式都是线性常微分方程的解。为进一步分析系统的运动, 需要正确理解后两种形式的解的构成概念。具体地说, 系统的运动, 常常看成是由暂态运动和稳态运动组成, 或者看成由零状态响应和零输入响应组成。零状态响应由稳态分量和部分暂态分量构成, 零输入响应仅由部分暂态分量组成。

3. 线性特性

对于线性定常系统, 除叠加原理之外, 在初始条件为零时, 某输入信号导数的响应等于该输入信号响应的导数; 输入信号积分的响应等于该信号响应的积分。由于系统的脉冲

响应仅包含暂态部分, 因而其运动特性更能直观地反映系统的暂态性能。

为了便于对系统进行分析、设计和比较, 根据系统常遇到的输入信号形式, 在数学描述上加以理想化的一些基本输入函数, 称为典型输入信号。常用的典型输入信号有: 单位阶跃函数, 单位斜坡(速度)函数, 单位抛物线(加速度)函数。

3.3 线性系统的暂态性能

暂态响应是指系统从一个平衡状态(初始状态)到另一个平衡状态(稳态)的响应过程, 或者从微分方程的解来说, 暂态响应是指暂态分量从初始值衰减到几乎为零的过程。暂态响应又称为动态过程或过渡过程。它可以提供关于系统稳定性、响应速度及阻尼情况等的信息, 主要反映与快速性相关的指标。

1. 性能指标

暂态响应的性能指标是以系统在单位阶跃输入作用下的衰减振荡过程(或称欠阻尼振荡过程)为标准来定义的。这些指标主要有:

- (1) 峰值时间 t_p : 响应过程中, 输出与稳态值出现最大误差的时间;
- (2) 上升时间 t_r : 响应第一次由稳态值的 10% 上升到 90%, 或由 5% 上升到 95%, 或由 0% 上升到 100% 所需的时间;
- (3) 延迟时间 t_d : 响应第一次达到稳态值的 50% 所需的时间;
- (4) 最大超调量 $\sigma\%$: 响应的最大偏差量与终值之差的百分比;
- (5) 调节时间(过渡时间、稳定时间) t_s : 输出响应与稳态值的误差曲线进入, 并保持在一定范围(Δ)内(一般 Δ 取 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$) 所需的时间。

2. 一阶系统的暂态响应

典型一阶系统的结构图如图 3-1 所示。它的开环和闭环传递函数分别为:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{Ts} \quad \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中, T 为系统时间常数。

零初始条件下的单位阶跃响应为 $h(t) = 1 - e^{-t/T}$ 。
则 $t_r = 3T \sim 4T$ ($\Delta = \pm 5\% \sim 2\%$), $\sigma\% = 0$

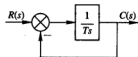


图 3-1 典型一阶系统

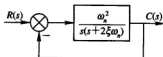


图 3-2 典型二阶系统

3. 二阶系统的暂态响应

典型二阶系统的结构图如图 3-2 所示。它的开环和闭环传递函数分别为:

$$G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中, ξ 为阻尼系数, ω_n 为无阻尼振荡角频率(也称为自然振荡角频率)。

闭环极点为: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

(1) 零初始条件下, $0 < \xi < 1$ 欠阻尼时单位阶跃响应为:

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

式中, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ 为有阻尼振荡角频率; $\delta = \xi\omega_n$ 为衰减因子; $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ 为迟后角度。

则有
$$t_s = \frac{3.5 \sim 4.5}{\xi \omega_n} \quad (\Delta = \pm 5\% \sim 2\%) \quad (3-1)$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \quad (3-2)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-3)$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4)$$

以上(3-1)~(3-4)各式需要记住。 $\sigma\%$ 完全由 ξ 决定, ξ 越小, $\sigma\%$ 越大。一般当选取 $\xi = 0.4 \sim 0.8$ 时, $\sigma\%$ 介于 1.5% 至 25.4% 之间。

(2) 当 $\xi \geq 1$ 时, 系统响应不产生振荡; 当 $\xi \leq 0$ 时, 系统不稳定。

当 $\xi = 1$ 时为临界阻尼:

$$h(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t_s \approx 4.7 \frac{1}{\omega_n} (\Delta = 5\%)$$

当 $\xi > 1$ 时为过阻尼:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left\{ \frac{\exp[-(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n t]}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}} - \frac{\exp[-(\xi + \sqrt{\xi^2-1})\omega_n t]}{\xi + \sqrt{\xi^2-1}} \right\}$$

当 $\xi > 1$ 且 $(\xi + \sqrt{\xi^2-1}) \gg (\xi - \sqrt{\xi^2-1})$ 即 $\xi \gg 1$ 时, 二阶系统闭环传递函数近似为:

$$\Phi(s) = \frac{(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n}{s + (\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n}$$

此时 $h(t) = 1 - \exp[-(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n t]$,

$$t_s \approx (3 \sim 4) \frac{1}{(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n} (\Delta = 5\%)$$

(3) 当 $\xi = 0$ 时为无阻尼等幅振荡:

$$h(t) = 1 - \cos\omega_n t$$

图 3-3 给出了不同阻尼比 ξ 时, 二阶系统单位阶跃响应曲线簇。

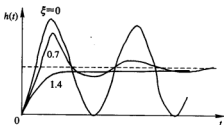


图 3-3 二阶系统单位阶跃响应曲线

4. 高阶系统的暂态响应

对于高阶系统, 常采用近似方法处理, 也就是高阶系统暂态性能经常可由一对最靠近虚轴的极点(称为主导极点)来估计。近似的原则(或称存在主导极点的条件)有:

(1) 当其它零极点离开虚轴的距离是主导极点至虚轴的距离五倍以上时, 这些零极点则称为非主导零点或非主导极点。此时, 它们对系统的暂态性能的影响就可以忽略。

(2) 有时, 一对零极点离虚轴很近, 但它们之间的距离是主导极点至虚轴距离的十分之一或更小时, 它们对系统的暂态性能的影响也可以忽略。

以上情况可把高阶系统近似成二阶系统进行分析。

在对高阶系统降阶处理时, 要注意首先将系统的传递函数写成时间常数的表达式(参见(2-4)式), 再将时间常数很小的项去掉。使高阶系统降阶, 此时可保证降阶前后的稳态增益不变, 也就是稳态误差特性不变; 而不能写成零极点表达式(参见(2-3)式), 再将离虚轴很远的零极点的项去掉, 使高阶系统降阶, 这是错误的, 因为此时稳态增益发生了变化, 也就是稳态误差发生了变化。

3.4 线性系统的稳定性

1. 稳定的概念

一个处于平衡状态的系统, 在扰动作用下, 偏离了平衡状态; 当扰动消失后, 随着时间的增长, 系统能恢复到原来的平衡状态, 则称该系统是稳定的。反之, 则是不稳定的。

对于线性系统, 只有零输入响应具有收敛性质, 系统才为稳定的。即要求闭环系统传递函数的极点(闭环特征方程的全部根)的实部全为负, 也就是要求闭环极点全部在 S 平面左半部(不包括虚轴)。这是线性系统稳定的充要条件和保证线性系统稳定的根本点。

设(闭环)特征方程为 $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$, 那么系统稳定的必要条件为: 系统特征多项式的系数全不为零且符号相同。

下面给出不用直接求出闭环特征方程的根, 就能确定闭环特征方程全部根的实部是否为负的充要条件。

2. 劳斯判据

由闭环特征方程的系数构成劳斯表的头两行, 按下面的规则产生后 $n-1$ 行:

s^n	a_0	a_2	a_4	$a_6 \dots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$a_7 \dots$
s^{n-2}	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$b_4 \dots$
s^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$	$c_4 \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^2	e_1	e_2		
s^1	f_1			
s^0	$g = \frac{f_1 e_2 - e_1 \times 0}{f_1} = e_2$			

当劳斯表第一列元素全大于零时,系统是稳定的;反之,系统则是不稳定的。第一列元素符号改变的次数,即在右半 S 平面根的个数。在应用劳斯表时可能遇到下列特殊情况:

- (1) 劳斯表中某行第一列元素是零,其它元素不全为零。此时,可采用三种方法:
 - a. 以一个正的无穷小 ϵ 代替该零元素,继续按规则列表。
 - b. 以一个 $(s+a)$ ($a>0$) 因子乘以原多项式,得到一个新的多项式,再重新列表。
 - c. 以 $1/s$ 代替原多项式中的 s , 得到一个新的多项式,再重新列表。
- (2) 劳斯表中某一行元素全为零。此时可按下述步骤处理:
 - a. 以全零行的上一行元素为系数,组成一个辅助方程 $A(s)=0$;
 - b. 以 $dA(s)/ds$ 的系数为全零行系数,继续列表;
 - c. 解辅助方程 $A(s)=0$, 所得根是特征多项式根的一部分。

在遇到特殊情况时,要注意以下几点:

- (1) 系统必是不稳定的或是临界稳定的;
- (2) 在右半 S 平面根的个数仍为第一列元素的符号变化次数;
- (3) 辅助方程在右半 S 平面根的个数已包含在第一列元素的符号变化次数之中;
- (4) 某一行各元素同时乘以一个大于零的数不影响判据结果。

如果系统是稳定的,劳斯判据不能表明系统特征根在 S 平面上相对于虚轴的距离,也就是不能判别系统是否具备满意的暂态性能。为了使稳定的系统具有良好的动态性能,常希望在 S 平面上系统的特征根相对于虚轴有一定的距离。假设 a ($a>0$) 是稳定系统的特征根与虚轴的最小距离 (a 常称为稳定度),对于稳定的系统,稳定度 a 的求法如下:

令 $s_1 = s - a$ ($s = s_1 + a$),代入原系统特征方程,得到一个以 s_1 为变量的新特征方程,运用劳斯判据求出使新特征方程稳定的最大 a ,则该 a 即为原系统的特征根与虚轴的最小距离。

3. 赫尔维茨判据

赫尔维茨判据指出系统稳定的充要条件是特征多项式的各项系数为正,且如下各阶赫尔维茨行列式全部为正。

$$D_1 = a_1; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

式中,注脚大于 n 的系数或注脚为负的系数,均应以零取代。

3.5 控制系统的稳态性能

1. 一般概念

系统的稳态性能用稳态误差衡量。稳态误差是指稳定的系统在输入加入后,经过足够长的时间,其暂态响应已衰减到微不足道时,稳态响应的期望值与实际值之差。

从稳态误差定义可知稳态误差 e_{ss} 等于输出的期望值减去输出的稳态分量。由于在实

际应用上,输出的期望值不能直接测量,因而常常采用稳态偏差 $e_{ss} (e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s))$ 替代稳态误差 ϵ_{ss} 。见图 3-4。

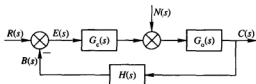


图 3-4 典型控制系统结构图

当 $H(s) = 1$ 时, $\epsilon_{ss} = e_{ss}$; 当 $H(s) \neq 1$ 时, $\epsilon(s) = \frac{1}{H(s)}E(s)$, 或 $\epsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{H(s)}R(s)$ 。

当 $N(s) = 0$ 时, 误差为:

$$E_1(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_o(s)H(s)}R(s)$$

给定输入的稳态误差为:

$$e_{ss1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)H(s)}$$

当 $R(s) = 0$ 时, 误差为:

$$E_2(s) = \frac{-G_o(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)H(s)}N(s)$$

扰动输入的稳态误差为:

$$e_{ss2} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_o(s)H(s)N(s)}{1 + G_c(s)G_o(s)H(s)}$$

总的误差为: $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2}$

2. 误差系数

图 3-4 所示的系统其开环传递函数为下述时间常数形式:

$$G_c(s)G_o(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

式中: v 为系统的类型数, $v=0$ 称为零型系统, $v=1$ 称为 1 型系统等等; K 为开环增益。

$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G_o(s)H(s)$, 为位置误差系数。阶跃输入时, 系统的稳态误差为位置误差:

$$e_{ssp} = \frac{1}{(1 + k_p)}。$$

$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G_o(s)H(s)$, 为速度误差系数。速度输入时, 系统的稳态误差为速度误差:

$$e_{ssv} = \frac{1}{k_v}。$$

$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G_o(s)H(s)$, 为加速度误差系数。加速度输入时, 系统的稳态误差为加速度误差: $e_{ssa} = 1/k_a$ 。

当给定输入不同时,可按上式求得不同结构类型系统的给定稳态误差的终值,见表 3.1。

表 3.1 0 型、1 型和 2 型系统给定稳态误差的终值

给定输入	给定稳态误差的终值		
	0 型系统	1 型系统	2 型系统
$1(t)$	$\frac{1}{1+k_p}$	0	0
t	∞	$\frac{1}{k_v}$	0
$\frac{1}{2}t^2$	∞	∞	$\frac{1}{k_a}$

稳态误差系数 k_p 、 k_v 和 k_a 的数值有为零、固定常值或无穷大三种可能(其中 k_p 只有固定常值或无穷大两种可能)。

3. 小结

- (1) 必须在稳定的前提下,才可讨论稳态指标和暂态指标。
- (2) 可通过增加系统类型及开环增益,减小稳态误差。
- (3) 可通过增加误差至扰动作用点之间的积分环节及增益,减小扰动引起的误差。
- (4) 注意偏差与误差的区别;尤其要注意的是在扰动和给定输入同时作用时,二者引起的误差(或偏差)之和位置要一致。
- (5) 在运用拉氏变换终值定理时,要注意使用条件,即 $sE(s)$ 的全部极点除了坐标原点外应全部在 s 平面左半部(不包括虚轴)。

3.6 例题讲解

这章内容较多,它通过时域解的概念,来阐述控制系统稳、快、准三方面性能的要求和指标。在运用本章概念进行控制系统分析时,要注意以下几个问题,本章习题也是围绕如下内容编排的。

- (1) 会求系统的性能指标。
- (2) 要记住一些基本公式,如二阶振荡系统的超调量和调节时间表表达式。对于高阶系统,若存在一对主导极点,可把高阶系统近似成二阶系统来进行分析;若不存在一对主导极点,则按定义求性能指标。
- (3) 熟练运用劳斯判据(或赫尔维茨判据),要特别注意特殊情况的处理。

例 3.1 系统结构图如图 3-5 所示。其零初始条件下单位阶跃响应的初始斜率等于 10,稳态值也为 10,系统稳态位置误差 e_{ss} 为零。试确定 K 、 n 和 T 值。

解 本题是一道典型试题,它含有对系统性能多方面的要求。

分析: ① 已知 $c(t)$ 为零初始下单位阶跃响应,则 $c'(t)$ 为单位脉冲响应,且零初始条件下单位脉冲响应的



图 3-5

拉氏变换就为系统闭环传递函数；② $c(t)$ 的初始斜率为 10，即已知 $c'(t)|_{t=0} = 10$ ；已知稳态值为 10，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 10$ ；③ 又已知 $e_{ss} = 0$ ，则系统必为 I 型以上系统，即 $n \geq 1$ ；④ 时域形式可利用拉氏变换的初值和终值定理，表示成下列形式：

$$c'(t)|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} sL[c'(t)] = 10, \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sL[c(t)] = 10$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+a)}{s^n(Ts+1) + (s+a)}$$

方法一：因为 $e_{ss} = 0$

所以 $n \geq 1$

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{K(s+a)}{s^n(Ts+1) + (s+a)} \cdot \frac{1}{s}$$

因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 10$

所以 $\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = 10$

所以 $\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s+a)}{s^n(Ts+1) + (s+a)} = K$ ，则有 $K=10$ 。

又因为

$$\lim_{t \rightarrow 0} c'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sg(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2 + Kas}{Ts^{n+1} + s^n + s + a} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^{n+1}} = 10$$

要使上式极限存在，必有 $n+1=2$ ，即 $n=1$ 。

由 $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^2} = \frac{K}{T} = 10$ 得 $T=1$ ，所以 $K=10$ ， $T=1$ ， $n=1$ 。

方法二：因为 $e_{ss} = 0$ ，则 $n \geq 1$ ，系统为稳定的。

闭环特征方程为

$$Ts^{n+1} + s^n + s + a = 0$$

因为系统为稳定的，即上式特征根位于 s 平面左半部，则特征方程不能缺项，应有 $n \leq 2$ 。

当 $n=2$ 时， $\lim_{t \rightarrow 0} c'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^{n+1}} = 0$ ，与题意不符，所以 $n=1$ 。

说明：当系统闭环传递函数分母与分子次数之差大于零时，若 $c(t)$ 为系统阶跃响应，必有 $\lim_{t \rightarrow 0} c'(t) = 0$ ，即系统脉冲响应初始值为零或者说系统阶跃响应的初始斜率为零。

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 10$ ，得 $\lim_{s \rightarrow 0} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = K = 10$

由 $\lim_{t \rightarrow 0} c'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sg(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{T} = 10$ 得 $T=1$ ，所以 $K=10$ ， $T=1$ ， $n=1$ 。

例 3.2 设系统结构图如图 3-6 所示，试确定闭环系统稳定性。

解 图 3-6(a)和(b)的区别在于(a)图是 $1/(s-1)$ 环节的输出为系统的输出，(b)图是将 $(s-1)/(s+1)$ 环节的输出作为系统的输出，两系统可以说是相同的系统，只不过输出点的选择不同；而图(c)是将图(b)的两个环节的前后位置对调所成，仅以结构等效来说串联的两环节位置对调，不应影响系统的输出，也就是说(a)、(b)和(c)图应有相同的稳定性。该题的关键点在于抵消的零极点系统稳定性的影响。

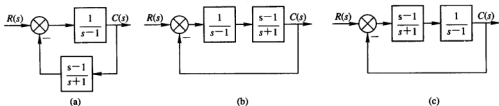


图 3-6

三个系统若用特征方程方法确定系统稳定，都具有以下相同的特征式：

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}$$

特征多项式只有一个在左半平面的根($s=-2$)，判得闭环系统是稳定的。但这是错误的结论，因为这时出现了零极点抵消的情况，抵消结果使闭环丢失了一个极点($s=1$)。因此不能仅用特征多项式来求闭环极点，并以此决定系统的稳定性。

(1) 对于(a)图，闭环传递函数为：

$$\phi_a(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1/(s-1)}{1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

闭环系统有一个极点在右半 s 平面，则系统是不稳定的。

(2) 对于(b)图，闭环传递函数为：

$$\phi_b(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$

讨论：闭环只有一个左半平面的根($s=-2$)，判得闭环系统稳定；但这也是错误的结论。从分析中可知(a)图和(b)图在本质上是相同的系统，应具有相同的稳定性。 $\phi_a(s)$ 明确告知系统不稳定，而 $\phi_b(s)$ 则说明系统是稳定的，显然必有一个结论是错误的。因为 $\phi_b(s)$ 是零极点抵消后所得到的，所以由 $\phi_b(s)$ 所得的结论是错误的。

$\phi_b(s)$ 应为 $\phi_b(s) = (s-1)/(s+2)(s-1)$ ，不能简单地零极点抵消，错误地降低传递函数的阶次。

(3) 对于(c)图，闭环传递函数为：

$$\phi_c(s) = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{\frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{s-1}}{1 + \frac{s-1}{s+1} \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s+2}$$

若用上式判别系统的稳定性，也得出错误结论。分析同上，不能简单地将零极点抵消， $\phi_c(s)$ 应用下式判定稳定性：

$$\phi_c(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s-1)}$$

总结：从以上讨论和分析可知，在判别系统稳定性时，要注意出现零极点抵消时，要补上抵消的极点再确定稳定性；当然若被抵消的极点是稳定的，该极点不影响系统的稳定性。

进一步讨论：本题中，若用状态空间表达式判别系统稳定性，将不会出现如上问题。将图(a)、(b)、(c)改画成如图 3-7 所示形式，其中 x_1 和 x_2 为状态变量。则图 3-7(a)的状态方程为 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$ ；图 3-7(b)与图 3-7(a)的状态方程相同；图 3-7(c)的状态方程为 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} r$ 。三个系统的状态矩阵相同，均为 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ，特征方程为：

$$|sI - A| = (s-1)(s+2) = 0$$

说明系统有一个极点在右半平面，所以三个系统均不稳定。

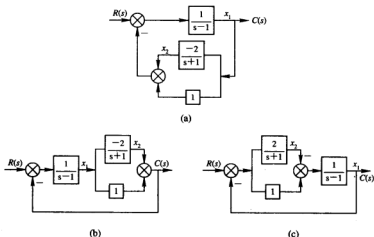


图 3-7

例 3.3 设控制系统的结构图如图 3-8 所示，现在为了使系统特征方程根的实部不大于 -1，试确定 K 的数值范围。

解 根据劳斯判据仅可判别系统特征根位于左半平面(不含虚轴)的个数。若对原复平面 s 的纵轴向左平移 $a(a > 0)$ 个单位，建立新的复平面 s_1 ，则新的复平面 s_1 的左半部即为原系统中 s 的实部小于 $-a$ 的部分。见图 3-9。

那么在 s_1 平面上系统稳定，即 s 平面上系统特征根在 $-a$ 左侧。该方法可以确定系统稳定的“程度”。系统的特征方程为：

$$\Delta(s) = s^3 + 8s^2 - 15s + K = 0$$

令 $s = s_1 - 1$ ，代入上式得：

$$\Delta(s) = s_1^3 + 5s_1^2 + 2s_1 + K - 8 = 0$$

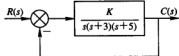


图 3-8

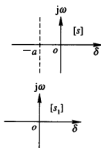


图 3-9

说明：系统要稳定，则上式各项系数应大于零，且对于三阶系统要求中间两项系数的乘积大于两边两项系数的乘积。

$$\text{即有：} \begin{cases} K-8 > 0 \\ 5 \times 2 > 1 \times (K-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > 8 \\ K < 18 \end{cases}$$

则为了使系统特征根的实部不大于-1，应有 $8 < K < 18$ 。

例 3.4 设系统方程如下，试用劳斯判据确定系统正实部根的个数。

$$(1) \Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = 0$$

$$(2) \Delta(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

$$(3) \Delta(s) = s^6 + s^5 + 6s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 4s + 4 = 0$$

$$(4) \Delta(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

$$(5) \Delta(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

解 系统稳定的必要条件是闭环系统特征方程的所有系数大于零(注意不包含零)；若满足必要条件，且劳斯判据第一列全大于零(注意不包含零)，则系统稳定。尤为注意的是，劳斯阵出现特殊情况时，此时系统的闭环极点必有在虚轴上或者右半平面上的极点，系统是不稳定的，但在右半平面上的极点个数仍为劳斯阵第一列符号改变的次数。

(1) $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = 0$ ，劳斯阵如下：

s^4	1	10	24
s^3	5	20	0
s^2	6	24	
s^1	ϵ (本应为零)		
s^0	24		

由于第一列除 ϵ 外均为正，第一列符号没有改变，因而此时处于临界稳定，即没有正实部的根，但有虚根存在，即系统是不稳定的。因 s^1 首行为零，该行可看成全零行，由辅助方程 $6s^2 + 24 = 0$ ，得 $s_{1,2} = \pm j2$ 为原特征方程的根。实际上， $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = (s^2 + 4)(s + 2)(s + 3) = 0$ 。

(2) $s^3 - 3s + 2 = 0$ ，缺项且各项系数符号不一致，系统不稳定。

s^3	1	-3
s^2	ϵ (本应为零)	2
s^1	$-3 - \frac{2}{\epsilon}$ (为负)	
s^0	2	

当 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 趋于 0 时, 上阵中第三行首列为负, 故劳斯阵第一列符号改变两次, 所以有两个正实部的根。

讨论: 虽然第 2 行首列 ϵ 趋于 0, 但没有虚根。注意这与上题第四行首列 ϵ 趋于 0 时出现虚根的区别。实际上, $s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$ 。

$$(3) s^6 + s^5 + 6s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 4s + 4 = 0$$

s^6	1	6	9	4
s^5	1	5	4	
s^4	1	5	4	
s^3	0	0	0	
s^2	2.5	4		
s^1	3.6			
s^0	4			

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{辅助方程 } s^4 + 5s^2 + 4 = 0 \\ &\text{求导得 } 4s^3 + 10s = 0 \end{aligned}$$

由于第一列符号没有改变, 故没有正实部的根。又因出现第四行全为零, 故系统是不稳定的, 但为临界稳定。由于第四行全为零, 那么辅助方程的根也为原特征方程的根。解

$$\text{辅助方程得 } s_{1,2} = \pm j2, s_{3,4} = \pm j1, \text{ 原方程的另外两个根为 } s_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

讨论: 劳斯阵出现全行为零时, 这说明在系统的特征方程中存在着对称于平面原点的根, 它们或为共轭复根, 或为符号相异; 绝对值相同的成对实根, 实部符号相异; 而虚部数值相同的成对的共轭复根, 可能上述情况同时存在。该例中, 由于第一项符号没有改变, 所以只存在一对虚根。

$$(4) s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0, \text{ 缺项且各项系数符号不相同, 故不稳定。}$$

第一列符号改变一次, 则有一个闭环极点在右半 S 平面。解辅助方程 $A(s) = 2s^4 - 2 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm 1, s_{3,4} = \pm j$, 闭环极点中还包含一对虚极点。实际上, $\Delta(s) = (s+2)(s+1)(s+j)(s-j)$ 。

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	0	0	
	8	0	
s^2	ϵ	-2	
s^1	$\frac{\epsilon+16}{\epsilon}$ (正)		
s^0	-2		

$$\begin{aligned} &\text{辅助方程 } A(s) = 2s^4 - 2 = 0 \\ &\text{求导得 } 8s^3 = 0 \end{aligned}$$

$$(5) s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	0	0	
	4	4	
s^2	1	1	
s^1	ϵ	0	
s^0	1		

$$\text{辅助方程 } A(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = 0$$

$$\text{求导 } \frac{dA}{ds} = 4s^3 + 4s$$

第一列符号没有变化, 因此系统没有正实部的根。由于出现特殊情况, 而第一项符号又不发生变化, 因而有虚轴上的根。第 3 行出现全零, 而第 5 行又出现首列为零, 此时特征方程在虚轴上有重根, 所以系统是不稳定的, 也不是临界稳定的。临界稳定是指只有系统特征方程在虚轴上的根仅为一对纯虚根时, 而其它根在左半平面的情况。

$$\text{实际上, } \Delta(s) = s(s+1)(s+j)(s-j)(s+j)(s-j) = s(s^2+1)^2 = 0.$$

例 3.5 已知单位反馈控制系统的开环传递函数 $G_o(s) = \frac{K}{s(s^2+7s+17)}$ 。

- (1) 确定系统产生自振荡 K 的取值, 并求出振荡频率;
- (2) 若要求闭环极点全部位于垂线 $s=-1$ 的左侧, 求 K 的取值范围;
- (3) 若要求闭环极点的实部均小于 -2 , 求 K 的取值范围。

解 闭环的特征方程为 $s^3 + 7s^2 + 17s + K = 0$

s^3	1	17
s^2	7	K
劳斯表:	s^1	$\frac{(119-K)}{7}$
	s^0	K

$$\text{令 } \frac{(119-K)}{7} = 0 \text{ 即 } K = 119 \text{ 时, 系统出现自振(临界稳定状态).}$$

由全零行的上一行构成辅助方程 $7s^2 + 119 = 0$, 解得

$$s^2 = -17, s_{1,2} = \pm j\sqrt{17}$$

所以振荡频率为 $\omega_s = \sqrt{17}$ 。

令 $s = s_1 - 1$, 代入闭环特征方程得:

$$(s_1 - 1)^3 + 7(s_1 - 1)^2 + 17(s_1 - 1) + K = 0 \quad \text{即 } s_1^3 + 4s_1^2 + 6s_1 + K - 11 = 0$$

$$\text{令 } \begin{cases} K - 11 > 0 \\ 4 \times 6 - 1 \times (K - 11) > 0 \end{cases}, \text{解得 } 11 < K < 35.$$

所以当 $11 < K < 35$ 时, 所有闭环极点落在 $s=-1$ 垂直线的左侧。

令 $s = s_1 - 2$, 代入闭环特征方程得:

$$(s_1 - 2)^3 + 7(s_1 - 2)^2 + 17(s_1 - 2) + K = 0 \quad \text{即 } s_1^3 + s_1^2 + s_1 + K - 14 = 0$$

$$\text{令 } \begin{cases} K - 14 = 0 \\ 1 \times 1 - 1 \times (K - 14) > 0 \end{cases}, \text{解得 } 14 < K < 15.$$

所以当 $14 < K < 15$ 时, 闭环极点的实部均小于 -2 。

例 3.6 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ ，式中

$T_1 = 0.1(s)$, $T_2 = 0.5(s)$ ，输入信号为 $r(t) = 2 + 0.5t$ 。

(1) 求 $K = 1$ 时的系统稳态误差，(2) 是否可以选某一合适的 K 系统稳态误差为 0.025?

解 系统稳态误差取决于系统开环增益，该增益是时间常数表达式形式的常数项。对于线性系统误差的求取也可用叠加原理，即输入为不同典型信号的代数和时，误差为各典型信号产生误差的代数和。另外在求稳态误差时，要在系统是稳定的前提下求，否则无意义。

(1) 因为系统开环传递函数为 I 型系统，则在 $r(t) = 2 \times 1(t)$ 输入时，稳态误差为零，即 $e_{ss1} = 0$ 。

在 $r(t) = \frac{1}{2}t$ 输入时，稳态误差为 $e_{ss2} = \frac{1}{10K} \cdot \frac{1}{2} = 0.05$ 。

所以 $K = 1$ 时，系统稳态误差为 $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = e_{ss2} = 0.05$

(2) 要使 $e_{ss} = 0.025$ ，即 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10K} = 0.025$ ，得 $K = 2$ 。对于 $K = 2$ 时，系统特征方程为

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + 10K = 0$$

有

$(T_1 + T_2) \times 1 = (0.1 + 0.5) \times 1 = 0.6 < T_1 T_2 \times 10K = 0.1 \times 0.5 \times 10 \times 2 = 1$
则系统不稳定，因此不可以选择合适的 K ，使系统稳态误差为 0.025。

例 3.7 系统如图 3-10 所示，试求下列各系统的静态误差函数 k_p 、 k_v 和 k_a ，以及输入 $r(t) = 6t^2 \times 1(t)$ 时的静态误差 e_{ss} 。

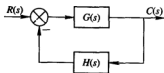


图 3-10

(1) $G(s) = \frac{12}{s^2(s+2)}$, $H(s) = s + 0.5$

(2) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6}{s^2 + 33s + 24}$, $H(s) = 5s + 4$

(3) $G(s) = \frac{12}{s(s+1)}$, $H(s) = \frac{1}{s+3}$

解 $G(s) = \frac{12(s+0.5)}{s^2(s+2)} = \frac{3(2s+1)}{s^2(0.5s+1)}$, $R(s) = \frac{12}{s^3}$

(1) $G(s)H(s) = \frac{12(s+0.5)}{s^2(s+2)}$ ，系统为 II 型系统，开环增益 $K = 3$ 。所以 $k_p = \infty$ ，

$k_v = \infty$, $k_a = 3$, $e_{ss} = \frac{12}{k_a} = 4$ 。

(2) $G(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)H(s)} = \frac{6}{s(s+3)}$, $G(s)H(s) = \frac{6(5s+4)}{s(s+3)} = 8 \frac{\left(\frac{5}{4}s+1\right)}{s\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

系统为 I 型系统，开环增益 $K = 8$ 。所以 $k_p = \infty$, $k_v = 8$, $k_a = 0$, $e_{ss} = \infty$ 。

(3) $G(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$, 系统处于临界稳定, 此时求其静态误差系数以及

e_{ss} 无意义。

例 3.8 控制系统结构如图 3-11(a)所示。



图 3-11

(1) 希望所有特征根位于 s 平面上 $s = -2$ 的左侧区域, 且阻尼系数 ζ 不小于 0.5, 试画出特征根在平面上的分布范围(用阴影表示);

(2) 当特征根处在阴影范围内时, 试求 K 、 T 的取值范围;

(3) 试求出系统在单位斜坡输入时的稳态误差;

(4) 为使上述稳态误差为零, 单位斜坡输入先通过一个比例—微分装置, 如图 3-11(b)所示, 试求出适当的 k_d 值。

解 误差是指期望输出与实际输出之差, 而一般期望输出与系统给定的输入 $R(s)$ 成正比; 当系统为单位负反馈时, 偏差 $E(s)$ 就为误差。因而本题的稳态误差即为 $E(s)$ 的稳态值, 见图 3-11(a)。而对于图 3-11(b), 则与反馈典型结构不同, 图(b)中的误差不是 $E(s)$, 根据题中第(4)问, 所指的误差应为(3)问中所定义的误差, 即 $e(t) = r(t) - c(t)$ 。对于图(b)所求的稳态误差, 不能直接用静态误差系数法, 而只能由定义式 $e(t) = r(t) - c(t)$ 去求。

(1) $\xi = 0.5$ 即 $\theta = \arccos 0.5 = 60^\circ$, 则所希望区域

见图 3-12。闭环传递函数为:

$$\begin{aligned}\phi_1(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K} \\ &= \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T} \\ \omega_n &= \sqrt{K/T}, \quad \zeta = \frac{1/T}{2\sqrt{K/T}} = \frac{1}{2\sqrt{KT}}\end{aligned}$$

特征根为 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

(2) 要求所有特征根位于 $s = -2$ 的左侧区域, 即根

的实部小于 -2, 即 $-\zeta\omega_n < -2$, 又 $-\zeta\omega_n = \frac{-1}{2T} < -2$, 故 $T < \frac{1}{4}$ 。

因为 $\zeta \geq 0.5$, 得 $\frac{1}{2\sqrt{KT}} > 0.5$, $KT < 1$, $K < \frac{1}{T}$

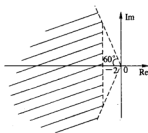


图 3-12

则 K, T 取值范围为 $\begin{cases} T < \frac{1}{4} \\ K < \frac{1}{T} \end{cases}$, 见图 3-13。

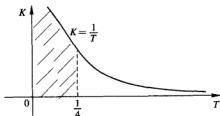


图 3-13

(3) 因为系统是 I 型系统, 则 $k_v = K$, $e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{K}$

图 3-11(b) 的系统闭环传递函数为:

$$\phi(s) = (k_c s + 1) \cdot \phi_1(s) = \frac{K k_c s + K}{T s^2 + s + K}$$

由题意知, 误差为 $e(t) = r(t) - c(t)$

$$R(s) - C(s) = R(s) - \phi(s)R(s) = [1 - \phi(s)]R(s) = \frac{T s^2 + (1 - K k_c)s}{T s^2 + s + K} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T s + (1 - K k_c)}{T s^2 + s + K} = \frac{1 - K k_c}{K}$$

(或由 $\phi(s)$ 求出等效单位反馈的开环传递函数 $G(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)} = \frac{K k_c s + K}{s(T s + 1 - K k_c)}$,

由 $G(s)$ 得速度误差系数 $k_v = \frac{K}{1 - K k_c} = \frac{1}{e_{ss}}$)

(4) 要使 $e_{ss} = 0$, 即 $1 - K k_c = 0$, $k_c = \frac{1}{K}$, 此时 $e(\infty) = 0$ 。

例 3.9 已知系统结构图如图 3-14 所示, 其中 $G_1(s) = 20$, $G_2(s) = \frac{5}{(0.1s + 1)s}$ 。

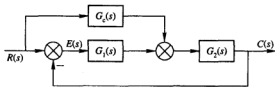


图 3-14

(1) 求正弦输入 $r(t) = \sin 5t$ 时, 若 $G_c(s) = 0$, 无前馈校正, 系统稳态幅值误差。

(2) 确定能完全补偿稳态幅值误差的理想前馈校正装置的传递函数 $G_c(s)$ 。

解 求稳态误差时, 终值定理即 $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ 的应用是有条件的, 该条件是 $E(s)$ 在 s 右半平面解析, 否则会产生错误的结论。在正弦输入下, $E(s)$ 必包含有虚轴上的极点, 即在 s 右半平面不解析, 故不能应用终值定理, 具体可见下面解法。

$$(1) G_c(s) = 0 \text{ 时, } \phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{s(0.1s+1)}{s(0.1s+1)+100}$$

方法一: 通过长除法, 把上式展开成级数和:

$$\phi_e(s) = 0 + 10^{-2}s + 9 \times 10^{-4}s^2 - 1.9 \times 10^{-5}s^3 + \dots$$

故动态误差系数为 $c_0 = 0$, $c_1 = 10^{-2}$, $c_2 = 9 \times 10^{-4}$, $c_3 = -1.9 \times 10^{-5}$, ...

可求得稳态误差为 $e_{ss}(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + c_2 \ddot{r}(t) + c_3 \dddot{r}(t) + \dots$

由于上级数收敛迅速, 现取二次近似得:

$$\begin{aligned} e_{ss}(t) &= 5 \times 10^{-2} \cos 5t - 5^2 \times 9 \times 10^{-4} \sin 5t \\ &= 0.05 \cos 5t - 0.023 \sin t = 0.055 \cos(5t + 24.6^\circ) \end{aligned}$$

因此系统稳态误差幅值为: $|e(\infty)| = \sqrt{0.05^2 + 0.023^2} \approx 0.055$ 。

$$\text{方法二: } E(s) = \phi_e(s)R(s) = \frac{s^2 + 10s}{s^2 + 10s + 1000} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} = \frac{as + b}{s^2 + 10s + 100} + \frac{cs + d}{s^2 + 25}$$

$$\text{有} \begin{cases} 25b + 1000d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + 10c + d = 5 \\ 25a + 1000c + 10d = 50 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} c = 0.052 \\ d = -0.115 \end{cases} \begin{pmatrix} a = -0.052 \\ b = 4.6 \end{pmatrix}$$

显然, 闭环系统是稳定的, 故稳态下:

$$E_{ss}(s) = \frac{cs + d}{s^2 + 25} = \frac{0.052s - 0.115}{s^2 + 5^2} = 0.052 \frac{s}{s^2 + 5^2} - \frac{0.115}{5} \cdot \frac{5}{s^2 + 5^2}$$

对上式求拉氏反变换得: $e_{ss}(t) = 0.052 \cos 5t - 0.023 \sin 5t$ 。

得系统稳态误差幅值为: $|e(\infty)| = \sqrt{0.052^2 + 0.023^2} = 0.055$ 。

(2) 加入 $G_c(s)$ 后, 有 $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - G_c(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$, 理论上只要

$$G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)} = \frac{(0.1s+1)s}{5}$$

就有 $E(s) = 0$; 则能完全补偿误差。

例 3.10 如图 3-15 所示系统, 其中 $G_1(s) = \frac{k_1}{(T_1s+1)}$, $G_2(s) = \frac{k_2}{(T_2s+1)}$ 。

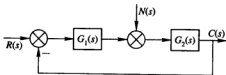


图 3-15

- (1) 当 $r(t) = 0, n(t) = 1(t)$ 时, 求系统的静态误差 e_{ss} 。
- (2) 当 $r(t) = 1(t), n(t) = 1(t)$ 时, 求系统的静态误差 e_{ss} 。
- (3) 若要减小 e_{ss} , 则应如何调整 k_1, k_2 ?
- (4) 如果分别在扰动点之前或之后加入积分环节, 对 e_{ss} 有何影响?

解 系统开环传递函数为: $G(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$

$$(1) \phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{-k_2(T_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_1 k_2}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \phi_{en}(s) = -\frac{k_2}{1 + k_1 k_2}$$

(2) 因为系统为 0 型系统, 则 $e_{mr} = \frac{1}{1 + k_p} = \frac{1}{1 + k_1 k_2}$, 由叠加原理得:

$$e_{ss} = e_{mr} + e_{ssn} = \frac{1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

(3) 由上式可知, 增加 k_1 可同时减小 $r(t)$ 、 $n(t)$ 阶跃输入所产生的稳态误差; 增加 k_2 只对减少由 $r(t)$ 阶跃输入所产生的稳态误差有效。

(4) 在扰动点之前的前向通道中加入积分环节, 可使系统成为一阶无差系统; 不论是系统的给定输入还是扰动输入其稳态指标均得到提高; 但在扰动点之后的前向通道加积分环节, 虽也使系统成为一阶无差系统, 但仅对提高给定输入下的稳态指标有利, 而对减小扰动作用下的稳态误差无效。

例 3.11 设复合控制系统结构如图 3-16 所示。

- (1) 计算当 $n(t) = t$ 时系统的稳态误差;
- (2) 设计 k_c , 使系统在 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差。

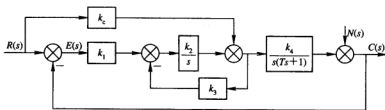


图 3-16

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \frac{E(s)}{N(s)} &= -\frac{1}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2/s}{1 + (k_2/s) \cdot k_3} \cdot \frac{k_4}{s(Ts+1)}} \\ &= -\frac{s(Ts+1)(s - k_2 k_3)}{s(s + k_2 k_3)(Ts+1) + k_1 k_2 k_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{ss}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{E(s)}{N(s)} \cdot N(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s(Ts+1)(s + k_2 k_3)}{s(s + k_2 k_3)(Ts+1) + k_1 k_2 k_4} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_3}{k_1 k_4} \end{aligned}$$

(2) 图 3-16 等效为图 3-17。由图 3-17 得

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - G_c G_2}{1 + G_1 G_2}$$

其中: $G_c = k_c s / k_2$, $G_1 = k_1$, $G_2 = \frac{k_2/s}{1 + k_3(k_2/s)} \cdot \frac{k_4}{s(Ts+1)} = \frac{k_2 k_4}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3)}$

则

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{k_c s}{k_2} \cdot \frac{k_2 k_4}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3)}}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2 k_4}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3)}} = \frac{Ts^3 + (1 + k_2 k_3 T)s^2 + (k_2 k_3 - k_c k_4)s}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3) + k_1 k_2 k_4}$$

要使 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差, 令 $k_2 k_3 - k_c k_4 = 0$, 得 $k_c = k_2 k_3 / k_4$ 。

则 $k_c = k_2 k_3 / k_4$ 时, 使系统在 $r(t) = t$ 作用下无稳态误差。

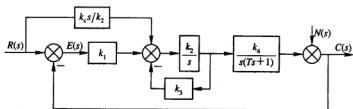


图 3-17

例 3.12 某控制系统结构如图 3-18 所示, 图中 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应为

$$\frac{8}{5}(1 - e^{-5t})$$

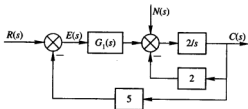


图 3-18

(1) 若 $r(t) = 20 \times 1(t)$, 求系统稳态输出。

(2) 若 $r(t) = 20 \times 1(t)$, 求系统的峰值时间 t_p 、超调量 $\delta\%$ 、调节时间 t_s 和稳态误差。

(3) 若 $n(t)$ 为可测量的阶跃扰动信号, 为除去扰动对稳态输出的影响, 试设计馈前补偿装置 $G_n(s)$, 并画出相应的系统结构图。

解 本题为综合题, 要求对时域分析法中的一些概念比较清楚, 以及记住一些基本表达式, 如 $\delta\%$ 、 t_s 等。

$$(1) G_1(s) = \frac{L[\frac{8}{5}(1 - e^{-5t})]}{L[1(t)]} = L\left[\frac{d}{dt} \frac{8}{5}(1 - e^{-5t})\right] = \frac{8}{s+5}$$

$$\text{闭环传递函数为: } \phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{8}{s+5} \cdot \frac{2}{s}}{1 + \frac{4}{s} + \frac{10}{s} \cdot \frac{8}{s+5}} = \frac{16}{s^2 + 9s + 100}$$

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{16}{s^2 + 9s + 100} \cdot \frac{20}{s} = \frac{16}{5}$$

$$(2) \phi(s) = \frac{16}{s^2 + 9s + 100} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 9s + 100}$$

$$\text{其中: } \omega_n = \sqrt{100} = 10, \zeta = 9/(2\omega_n) = 0.45, K = 0.16$$

$$\text{故: } t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.35(s), t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arcsin \zeta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.23(s)$$

$$\delta\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 20.5\%, t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 0.78(s)$$

$$\text{系统开环传递函数为: } G(s) = \frac{8}{s+5} \times \frac{\frac{2}{s}}{1 + 2 \times \frac{2}{s}} \times 5 = \frac{80}{s^2 + 9s + 20}$$

系统为 0 型系统, 增益 $K = 80/20 = 4$, 故

$$e_{ss} = \frac{20}{1+K} = \frac{20}{1+4} = 4$$

(3) 下面给出了两种消除扰动信号影响而设计的顺馈补偿方案(见图 3-19)。

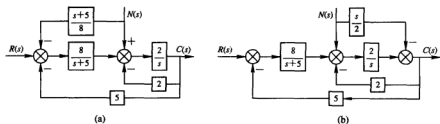


图 3-19 顺馈控制

例 3.13 设线性系统的结构图如图 3-20 所示。已知系统的无阻尼自振荡角频率 $\omega_n = 3 \text{ rad/s}$ 。试确定系统作等幅振荡时的 K 和 a 值。(K 和 a 均为大于零的常数)

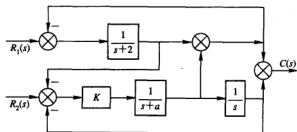


图 3-20

解 本题虽为双输入单输出系统,但系统的特征方程仍可由梅逊公式确定;系统的特性仍主要由特征方程的极点决定。

$$\text{系统有三个回环: } L_1 = \frac{-1}{s+2}, L_2 = -K \cdot \frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s}, L_3 = \frac{1}{s+2} \cdot K \cdot \frac{1}{s+a}$$

$$\text{两个回环不接触: } L_1 \cdot L_2 = \frac{K}{s(s+a)(s+2)}$$

则系统特征方程为:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_2 \\ &= 1 + \frac{1}{s+2} + \frac{K}{s(s+a)} - \frac{K}{(s+a)(s+2)} + \frac{K}{s(s+a)(s+2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } D(s) = s^3 + (a+3)s^2 + 3as + 3K = 0$$

$$\text{系统稳定时,必有} \begin{cases} a+3 > 0 \\ 3a > 0 \\ 3K > 0 \\ (a+3) \times 3a - 3K > 0 \end{cases}$$

当 $(a+3) \times 3a - 3K = 0$ 时,出现等幅振荡,此时为临界状态,且 $a > 0, K > 0$ 。

$$a^2 + 3a - k = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 3a \\ s^2 & a+3 & 3K \\ s^1 & 0 & 0 \\ & 2(a+3) & 0 \\ s^0 & 3K & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{辅助方程为 } A(s) = (a+3)s^2 + 3K = 0 \\ \text{求导 } \frac{dA}{ds} = 2(a+3)s \end{array}$$

$$\text{由 } A(s) = (a+3)s^2 + 3K = 0 \text{ 得 } s_{1,2} = -j\sqrt{\frac{3K}{a+3}}, \text{ 无阻尼自振角频率 } \omega_n = \sqrt{\frac{3K}{a+3}} = 3$$

解得 $K = 3(a+3)$, 代入 $a^2 + 3a - K = 0$ 得

$$a^2 + 3a - 3a - 9 = 0 \quad \text{即 } a^2 - 9 = 0, a = \pm 3$$

将 $a = -3$ 舍去,而将 $a = 3$ 代入 $K = 3(a+3)$, 得 $K = 18$ 。

则当 $a = 3$ 和 $K = 18$ 时,满足本题要求。

例 3.14 求下列函数的拉氏反变换。

$$(1) G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}; (2) G(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+s};$$

$$(3) G(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}; (4) G(s) = \frac{2s^2+7s+7}{s^2+3s+2}$$

$$\text{解 (1)} \quad G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1}$$

$$\text{其中: } k_1 = \lim_{s \rightarrow -2} G(s)(s+2) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+3}{s+1} = -1$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -1} G(s)(s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+3}{s+2} = 2$$

所以

$$G(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

则

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = (-e^{-2t} + 2e^{-t}) \cdot 1(t)$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{a_1 s + a_2}{s^2+s+1} + \frac{a_3}{s}, \text{ 极点为 } s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_3 = 0$$

$$\text{因为} \quad \lim_{s_1 \rightarrow -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} G(s)(s^2+s+1) = \lim_{s_1 \rightarrow -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{s+1}{s} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

又因为

$$\lim_{s_1 \rightarrow -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} G(s)(s^2+s+1) = \lim_{s_1 \rightarrow -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} (a_1 s + a_2) = -\frac{1}{2}a_1 + a_2 - j\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$$

比较上两式右边的实部和虚部, 得

$$a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2+s+1} = 1$$

$$\text{所以} \quad G(s) = \frac{-s}{s^2+s+1} + \frac{1}{s} = \frac{-\left(s + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{s}$$

$$\text{则} \quad g(t) = L^{-1}[G(s)] = \left(-e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1\right) \cdot 1(t)$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{a_3}{(s+1)^3} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_1}{s+1}$$

$$\text{其中: } a_1 = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^2}{ds^2} [G(s) \cdot (s+1)^3] = 1$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [G(s) \cdot (s+1)^3] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} (s^2+2s+3) = \lim_{s \rightarrow -1} (2s+2) = 0$$

$$a_3 = \lim_{s \rightarrow -1} G(s) \cdot (s+1)^3 = \lim_{s \rightarrow -1} (s^2+2s+3) = 2$$

$$\text{因为} G(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}, \text{ 则}$$

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = (t^2 e^{-t} + e^{-t}) \cdot 1(t)$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{4s^2+14s+14}{s^2+3s+2} = \frac{4s^2+14s+14}{(s+2)(s+1)} = k_0 + \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1} = k_0 + G_1(s)$$

$$G_1(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+1}$$

$$\text{其中: } k_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 4, k_1 = \lim_{s \rightarrow -2} G(s)(s+2) = -2, k_2 = \lim_{s \rightarrow -1} G(s)(s+1) = 4$$

$$\text{所以 } G(s) = 4 + \frac{-2}{s+2} + \frac{4}{s+1}, \text{ 则}$$

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = [4\delta(t) - 2e^{-2t} + 4e^{-t}] \cdot 1(t)$$

讨论: 注意当 $G(s)$ 的分母和分子次数相同时, $G(s)$ 展开成多项式和时必有一个常数项, 相应 $g(t)$ 中必有一个脉冲函数项, 见本题(4)。比较(1)和(4), 可见 k_1 和 k_2 求法相同; k_0 由式 $k_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ 求取。

例 3.15 设单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$ 。要求:

(1) 用拉氏反变换法确定系统的单位阶跃响应;

(2) 用主导极点法确定系统的单位阶跃响应。

解 (1) 拉氏反变换法

系统闭环传递函数为:

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10}{s^3 + 7s^2 + 10s + 10} = \frac{10}{(s+5.52)(s^2 + 1.48s + 1.83)} \\ &= \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}\end{aligned}$$

其中: $p = 0.052$, $\zeta = 0.547$, $\omega_n = 1.353$; 可导出 $\beta = \frac{p}{\zeta\omega_n} = 7.459$ 。

可得:

$$\begin{aligned}h(t) &= 1 - \frac{e^{-pt}}{p\zeta^2(\beta-2)+1} - \frac{e^{-\beta\omega_n t}}{\beta s^2(\beta-2)+1} [\beta\zeta^2(\beta-2)\cos\omega_n t + \frac{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_n t] \\ &= 1 - 0.076e^{-0.52t} - e^{-0.74t} (0.92 \cos 1.133t + 0.975 \sin 1.133t)\end{aligned}$$

由于第二项 $0.076e^{-0.52t}$ 衰减很快, 上式可近似为:

$$h(t) = 1 - e^{-0.74t} (0.926 \cos 1.133t + 0.975 \sin 1.133t)$$

讨论: 上述近似式仅以最后表达式中略去了非主导极点产生的微小分量 $0.07e^{-0.52t}$, 但已考虑了非主导极点对主导极点处留数的影响。

(2) 主导极点法

因为 $\beta = 7.459 > 5$, 而闭环传递函数可近似表示如下:

$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1.83}{s^2 + 1.48s + 1.83}$$

故

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \sin(\omega_n t + \arccos\zeta) = 1 - e^{-0.74t} (\cos 1.13t + 0.654 \sin 1.133t)$$

讨论: 在写闭环传递函数的近似式时要注意近似前后 $\phi(0)$ 应保持不变。这种近似方法比较简单, 但没有考虑略去的非主导极点对主导极点处留数的影响, 因此精度不如前者。

例 3.16 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$; 试求系统对单位阶跃输入的响应, 并求其上升时间 t_r 和最大超调量 $\sigma\%$ 。

解 由于本题求出的闭环传递函数不是典型的二阶振荡环节形式, 同时它也不能采用主导极点近似法表示成典型形式, 又因离虚轴最近的极点 $s_{1,2}$ 与除 $s_{1,2}$ 之外的其它零极点不满足 $1/5$ 要求, 所以采用典型公式求 t_r 和 $\sigma\%$ 将引起较大误差, 故宜按定义求其值。

闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{0.4s+1}{s^2+s+1}$, 设输入 $R(s) = \frac{1}{s}$, 则

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{0.4s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{(s+0.5) + \frac{\sqrt{3}}{15}(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(s+0.5)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$\text{得} \quad c(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{15} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right] \cdot 1(t)$$

$$\text{令} \quad c(t) = 1, \text{得} \tan \frac{\sqrt{3}}{2} t = -\frac{15}{\sqrt{3}}, \text{解得} t_r \approx 1.95(\text{s}).$$

$$\text{令} \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t_p} = 0, \text{得峰值时间为} t_p \approx 3.156(\text{s}), \text{则} \sigma \% = c(t_p) - 1 = 18\%.$$

例 3.17 设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = 1/100s^2$, 现要求没有过调的响应, 输入和输出函数形式如图 3-21 所示, 试求图中 t_1 和 k 值。

$$\text{解} \quad \text{闭环传递函数为} \Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{100s^2+1}$$

$$\text{由图知} \quad r(t) = k \cdot 1(t) + (1-k) \cdot 1(t-t_1), \text{得}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} [k + (1-k)e^{-t_1 s}]$$

则输出

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{100s}{100s^2+1} \right) [k + (1-k)e^{-t_1 s}]$$

由此得

$$c(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{10} \right) \cdot 1(t) + (1-k) \left(1 - \cos \frac{t-t_1}{10} \right) \cdot 1(t-t_1)$$

$$\text{分析} \quad (1) \text{当} t \leq t_1 \text{时}, 1(t) = 1, 1(t-t_1) = 0, \text{此时} c(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{10} \right)$$

$$\text{由图 3-21 可知:} \quad c(t_1) = k \left(1 - \cos \frac{t_1}{10} \right) = 1$$

$$(2) \text{当} t > t_1 \text{时}, 1(t) = 1, 1(t-t_1) = 1, \text{此时}$$

$$c(t) = 1 - \left[k \cos \frac{t}{10} + (1-k) \cos \frac{t-t_1}{10} \right]$$

又因此时 $c(t) = 1$, 故得

$$k \cos \frac{t}{10} + (1-k) \cos \frac{t-t_1}{10} = 0$$

$$\text{解方程} \quad \begin{cases} k \left(1 - \cos \frac{t_1}{10} \right) = 1 \\ k \cos \frac{t}{10} + (1-k) \cos \frac{t-t_1}{10} = 0 \end{cases} \quad \text{得} t_1 = 10\pi, k = 0.5.$$

例 3.18 已知系统的闭环传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K}$, 求临界放大系数 k_c 及 k_c 与参量 τ_1, τ_2, τ_3 的关系。

解 系统特征方程为:

$$D(s) = \tau_1 \tau_2 \tau_3 s^3 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + 1 + K = 0$$

要使系统稳定, 必有各项系数大于零且

$$(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 + \tau_3) \cdot (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - \tau_1 \tau_2 \tau_3 (1 + K) > 0$$

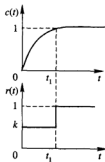


图 3-21

即

$$1 + K < (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \cdot \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right)$$

则临界放大系统 $k_c = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \cdot \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) - 1$

由上式可见, τ_1 、 τ_2 、 τ_3 中只要有一个足够小, 那么 k_c 就可以很大。决定 k_c 大小的实际上并不是各时间常数的绝对值, 而是其相对值, 即取决于各时间常数的比值。

上式可变为: $k_c = 2 + \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{\tau_2}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_3} + \frac{\tau_3}{\tau_1} + \frac{\tau_3}{\tau_2}$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial k_c}{\partial \tau_1} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} - \frac{\tau_2}{\tau_1^2} - \frac{\tau_3}{\tau_1^2} = 0 \\ \frac{\partial k_c}{\partial \tau_2} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_3} - \frac{\tau_1}{\tau_2^2} - \frac{\tau_3}{\tau_2^2} = 0 \\ \frac{\partial k_c}{\partial \tau_3} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_3^2} - \frac{\tau_2}{\tau_3^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\tau_2 + \tau_3)(\tau_1^2 - \tau_2\tau_3) = 0 \\ (\tau_1 + \tau_3)(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) = 0 \\ (\tau_1 + \tau_2)(\tau_3^2 - \tau_1\tau_2) = 0 \end{cases}$$

当满足以上三式时, k_c 有极值, 当 k_c 出现极值时 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$ 。

又因为 $\frac{\partial^2 k_c}{\partial \tau^2} = \frac{2}{\tau^3} > 0$, 故知极值为极小值而非极大值。

将 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$ 的关系代入到 k_c 式中, 则有 $k_{c \min} = 8$ 。

讨论: 由三个非周期环节串联组成的反馈控制系统, 当三个非周期环节时间常数相等时, 系统的临界开环增益最低。

例 3.19 设图 3-22(a) 示系统的单位阶跃响应曲线如图 3-22(b) 所示, 试确定系统参数 k_1 、 k_2 和 a 。

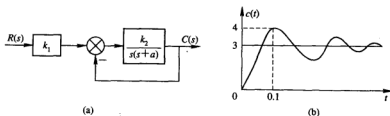


图 3-22

解 由图可知 $c(\infty) = 3$, $t_p = 0.1$, $c(t_p) = 4$, 则 $\delta\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$

系统闭环传递函数为: $\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1 k_2}{s^2 + as + k_2} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$

由终值定理有 $c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k_1 k_2}{s^2 + as + k_2} \cdot \frac{1}{s} = k_1 = 3$

由 $\delta\% = e^{-\zeta \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_p}$ 得 $\zeta = \sqrt{\frac{(\ln \delta)^2}{\pi^2 + (\ln \delta)^2}} = 0.3$; 由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ 得

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}} = 33.266$$

则 $k_2 = \omega_n^2 = 1107$, $a = 2\zeta\omega_n = 20$ 。

例 3.20 设控制系统如图 3-23 所示, 其反馈和局部反馈均不确定, 图中“0”表示断路。如果测得该系统的阶跃响应曲线有图 3-23(a)~(d) 四种情况, 试分别判断各种情况下系统的反馈极性, 并简要说明理由。

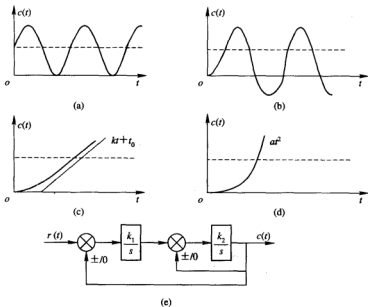


图 3-23

解 系统闭环传递函数为:

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_2/s}{1+f_2 k_2/s}}{1+f_1 \frac{k_1}{s} \cdot \frac{k_2/s}{1+f_2 k_2/s}} = \frac{k_1 k_2}{s(s+f_2 k_2) + f_1 k_1 k_2} = \frac{k_1 k_2}{s^2 + f_2 k_2 s + f_1 k_1 k_2}$$

其中: f_1, f_2 表示反馈断开为 0, 负反馈为 +1, 正反馈为 -1。

(1) 对于图 a, 出现等幅振荡, 说明 $\zeta = 0$, 则 $f_2 = 0$, 即局部反馈断开, 而且 $f_1 k_1 k_2 > 0$, f_1 为 +1, 即主反馈为负反馈。

(2) 对于图 b, 其阶跃响应振荡发散, 即系统不稳定。

特征方程 $s^2 + f_2 k_2 s + f_1 k_1 k_2 = 0$, 存在一对实部为正的复根, 即 $s_{1,2} = -f_2 k_2 \pm j\sqrt{4f_1 k_1 k_2 - f_2^2 k_2^2}$ 。要求 $f_2 k_2 < 0$, $f_2 = -1$, 局部反馈为正反馈; $4f_1 k_1 k_2 - f_2^2 k_2^2 > 0$, $f_1 = +1$, 主反馈为负反馈。

(3) 在阶跃函数输入下, 输出类似于斜坡函数, 即系统单调发散, 系统仅存在非负实根, 不存在复根, 并且有为零的极点存在, 才能使阶跃输入为斜坡输出。

对于 $s_{1,2} = -f_2 k_2 \pm j\sqrt{4f_1 k_1 k_2 - f_2^2 k_2^2}$, 由 $\sqrt{f_2^2 k_2^2 - 4f_1 k_1 k_2} - f_2 k_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} f_2 > 1 \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

即主反馈断开，局部反馈为负反馈。

(4) 在阶跃函数输入下，输出类似抛物线函数，即系统单调发散，系统仅存在非负实根，不存在复根，并且有两个为零的极点存在，才能使阶跃输入变为抛物线输出。则

$$\pm \sqrt{f_2^2 k_2^2 - 4f_1 k_1 k_2} - f_2 k_2 = 0, \text{ 即 } \begin{cases} f_2 = 0 \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

即主反馈断开，局部反馈也断开。

3.7 习 题

3.1 已知某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{15.36(s+6.25)}{(s^2+2s+2)(s+6)(s+8)}$$

试近似计算系统的单位阶跃响应性能指标：①最大超调量 $\delta\%$ ；②调节时间 t_s ；③稳态误差 e_{ss} 。

3.2 系统结构如图 3-24 所示，已知 $T=3$ ，系统输入单位斜坡信号稳态误差为 0.01，系统阻尼比为 0.5，试确定 K 和 K_d 值。

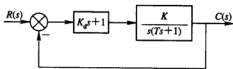


图 3-24

3.3 设控制系统如图 3-25(a)所示。

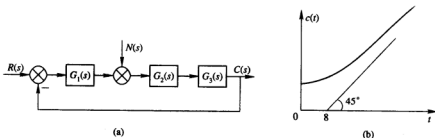


图 3-25

(1) 若 $R(s) = \frac{1}{s^2}$, $N(s) = 0$, $G_1(s) = 1$, $G_2(s) = 1$, $G_3(s)$ 为一阶环节，测得系统的输出响应为图(b)，求 $G_3(s)$ 。

(2) 若 $r(t) = t$, $n(t) = -2 \times 1(t)$, $G_1(s) = \frac{k}{0.2s+1}$, $G_2(s) = \frac{8}{s+1}$, $G_3(s) = \frac{0.25}{s}$ ，试求当 $K=1$ 和 $K=5$ 时系统的稳态误差。

3.4 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)(nTs+1)(n^2Ts+1)}$ ，式

中 $T > 0, n \geq 0$ 。

- (1) 试确定使系统稳定时参数的取值范围；
- (2) 求当 n 的取值分别为 $n = 1, 0.5, 0.1$ 时， K 的相应稳定域；
- (3) 说明系统各环节时间常数的大小以及其对系统稳定性的影响。

3.5 已知系统如图 3-26 所示。

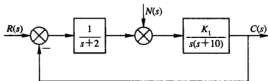


图 3-26

- (1) 当 $r(t) = (3+3t)1(t)$, $n(t) = 0$ 时，要使 $e_{ss} \leq 0.5$ ，求 K_1 值。
- (2) 若要使系统对控制输入的稳态特性保持不变，且又使扰动输入为阶跃信号时，稳态误差为零，应对系统进行怎么最简单的改变？

3.6 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(s+5.375)(s+1.125)^2}$ 。

- (1) 求系统的闭环极点，并判断系统是否存在主导极点；
- (2) 若存在主导极点，试确定其对应的 ζ 、 ω_n 、 $\delta\%$ 、 t_p 和 t_s ；
- (3) 求系统的单位阶跃响应，并讨论非主导极点过渡过程的影响。

3.7 已知系统的闭环传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{as+1}{(s+1)(s^2+s+1)^2}$ 。

- (1) 当 $a = 0$ 和 $a = 1.25$ 时，分别求系统的单位阶跃响应；
- (2) 讨论零点的作用。

3.8 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{500}{s(0.1s+1)}$ ，输入为 $r(t) = \sin 5t$ ，求系统给定的稳态误差系数(或动态误差系数)以及稳态误差幅值。

3.9 迟后系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{Ke^{-2s}}{10s+1}$ ，已知系统稳定的 K 值的范围是 $0 < K < 8.56$ 。

- (1) 能否用劳斯判据确定系统的稳定性？
- (2) 若纯迟后环节 e^{-2s} 分别用 $1-2s$, $\frac{1}{1+2s}$, $\frac{1-s}{1+s}$ 近似，用劳斯判据确定使系统稳定的 K 值的范围；
- (3) 将得到的结果与题中所给的 K 值范围进行比较，可得出什么结论？

3.10 已知控制系统方框图如图 3-27 所示，其中扰动信号 $n(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$ ，若要求系统稳态误差为零，求出适合的参考输入 $r(t)$ [系统稳态误差定义为 $e(t) = r(t) - c(t)$]。

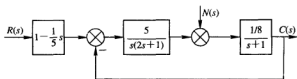


图 3-27

3.11 系统特征方程为 $s^5 - 4s^4 - 3s^3 + 3s^2 - 4s + 4 = 0$ ，求不在左半平面内的闭环极点数目。

3.12 系统特征方程如下，试判别系统稳定性，若不稳定，试讨论在右半平面上根的数目。

- (1) $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$
- (2) $s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10 = 0$
- (3) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$
- (4) $s^3 + 20s^2 + 9s + 100 = 0$
- (5) $s^3 + 20s^2 + 9s + 200 = 0$
- (6) $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$
- (7) $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 8s + 8 = 0$
- (8) $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$
- (9) $s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$
- (10) $s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$

3.13 已知一闭环系统的特征方程为 $(s+1)(s+1.5)(s+2)+K=0$ ，试用代数判据确定 K 的最大值，使系统特征方程的根的实部均小于 -1 。

3.14 某系统结构如图 3-28 所示：

(1) 为使系统满足稳定要求， K_1 值应满足什么条件？

(2) 若 $K_2 = 1$ ， $T_2 = 0.1$ ， $T_1 = 0.2$ 和 $a = 0.1$ ，试分别判断当 $K_1 = 10$ 及 $K_1 = 20$ 时系统的稳定性。

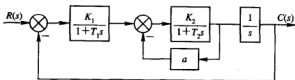


图 3-28

3.15 单位反馈系统的闭环传递函数为：

$$\text{系统 a: } \phi_b(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 7} \quad \text{系统 b: } \phi_b(s) = \frac{3s+7}{5s^2 + 2s + 10}$$

试求系统的稳态位置、速度和加速度误差系数。（提示：对于单位反馈系统，开环传递函数

$G(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)}$ ；另要注意的是，只有对稳定的系统，误差系数才有意义。）

3.16 控制系统如图 3-29 所示。

(1) $K_t = 0$ 时，试确定系统的阻尼比、无阻尼自由振荡角频率和单位斜坡函数输入作用下系统的稳态误差。

(2) 当 $\zeta = 0.6$ 时，试确定系统中 K_t 值和单位斜坡函数作用下系统的稳态误差。

(3) 当输入为单位斜坡函数时，欲保持 $\zeta = 0.6$ 和 $e_{ss} = 0.2$ ，试确定系统中 K_t 的值，此时放大器系数应为多少？

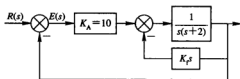


图 3-29

3.17 设系统结构图如图 3-30 所示。如果要求系统的超调量等于 15%，峰值时间等于 0.8 s，试求增益 K_1 和 K_t ，同时确定在此条件下系统的延迟时间、上升时间和调节时间。

3.18 系统结构图如图 3-31 所示。

(1) 已知 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应为 $1 - e^{-2t}$ ，试求 $G_1(s)$ ；

(2) 当 $G_1(s) = \frac{1}{s+2}$ ，且 $r(t) = 10 \cdot 1(t)$ 时，试求：① 系统的稳态输出；② 系统的峰值时间 t_p ，超调量 $\delta\%$ ，调节时间 t_s 和稳态误差 e_{ss} ；③ 概括绘出系统的输出响应 $c(t)$ 曲线。

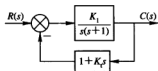


图 3-30

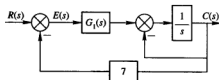


图 3-31

第4章 根轨迹分析法

4.1 本章要求

- (1) 能熟练地根据根轨迹的绘制法则绘制系统的大致根轨迹。
- (2) 能正确掌握广义根轨迹和零度根轨迹的概念, 以及它们的绘制方法。
- (3) 能根据根轨迹定性分析系统性能随参数变化的趋势。

4.2 基本概念

在研究控制系统时, 经常需要知道一个或几个参数的变化对系统性能的影响。从第3章可知, 系统的稳定性能和动态性能与闭环极点在S平面上的位置密切相关。由于闭环极点的位置对系统的性能起主要作用, 前面所提的问题就相当于需要知道, 一个或几个参数变化时, 闭环极点的位置是如何改变的。根轨迹分析法就是研究当开环系统的某一参数变化时, 闭环系统特征方程的根(极点)在S平面上的变化轨迹。

1. 根轨迹的定义

当系统的某一参数变化时, 闭环系统特征方程的根在S平面上的变化轨迹称为根轨迹。

2. 根轨迹方程

设系统的开环传递函数为下述零极点形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

其中 K_g 为系统的根轨迹增益, $-z_i$ 为开环零点, $-p_j$ 为开环极点。系统的闭环特征方程为:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\text{于是有} \quad K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1 \quad (4-1)$$

式(4-1)称为系统的根轨迹方程。

3. 绘制根轨迹的基本条件

由式(4-1)得:

$$\text{幅值条件} \quad |G(s)H(s)| = K_g \frac{\prod_{i=1}^n |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} = 1 \quad (4-2)$$

相角条件

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^n \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm (2k+1) \times 180^\circ \quad (K_g \geq 0) \quad (4-3)$$

$$\text{或} \quad \angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^n \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm 2k \times 180^\circ \quad (K_g \leq 0) \quad (4-4)$$

式中 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。(4-3)式称为**常规相角条件**,其根轨迹称为**常规根轨迹**; (4-4)式称为**零相角条件**,其根轨迹称为**零度根轨迹**。

4. 两点说明

(1) 根轨迹的幅值条件和相角条件都是由开环传递函数得出的,因此,系统的开环传递函数是绘制闭环系统根轨迹的依据。

(2) 在绘制根轨迹时,主要是应用相角条件。在 S 平面上,凡满足相角条件的点,必存在某确定的 K_g 使幅值条件成立。因而满足相角条件的所有点构成的图形就是系统的根轨迹;幅值条件则用来确定根轨迹上某确定点所对应的系统参数(如 K_g)的数值,或确定在某确定的参数值(如 K_g)下系统的闭环极点。

5. 闭环零极点和开环零极点的关系

设系统结构图如图 4-1 所示,其闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

前向通道传递函数 $G(s)$ 和反馈通道传递函数 $H(s)$ 分别表示为:

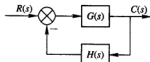


图 4-1

$$G(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^{n_1} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j)} \quad H(s) = \frac{K_2 \prod_{i=1}^{n_2} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_2} (s + p_j)}$$

$$\text{则开环传递函数为: } G(s)H(s) = \frac{K_1 K_2 \prod_{i=1}^{n_1+n_2} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1+n_2} (s + p_j)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (4-5)$$

$$\text{系统闭环传递函数为: } \Phi(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^{n_1} (s + z_i) \prod_{j=1}^{n_2} (s + p_j)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j) + K_g \prod_{i=1}^n (s + z_i)} \quad (4-6)$$

比较(4-5)式和(4-6)式可知:

- (1) 系统开环根轨迹增益为前向通道(根轨迹)增益和反馈通道(根轨迹)增益的乘积;
- (2) 系统闭环(根轨迹)增益等于前向通道(根轨迹)增益;
- (3) 系统闭环零点由前向通道传递函数的零点和反馈通道传递函数的极点所组成;
- (4) 对于单位反馈系统, 闭环根轨迹增益等于开环增益, 闭环零点等于开环零点。

4.3 绘制根轨迹的基本法则

绘制根轨迹用解析的方法十分繁琐, 为了简捷地绘制出根轨迹的大致图形, 根据相角条件和幅值条件推证出若干绘制根轨迹的规则, 见表 4.1。

表 4.1 绘制根轨迹的基本法则

序号	内 容	法 则
1	根轨迹的分支数和对称性	根轨迹的分支数为 $\max(n, m)$; 根轨迹具有连续性且对称于实轴
2	根轨迹的起点和终点	根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点 当 $n > m$ 时, 系统有 $n - m$ 个无穷远的开环零点 当 $n < m$ 时, 系统有 $m - n$ 个无穷远的开环极点
3	实轴上的根轨迹	实轴上由两个相邻的开环零极点构成的区间, 若其右边开环零极点数为 b , 则该区间在根轨迹上。当 $K_g \geq 0$ 时 b 应为奇数; 当 $K_g \leq 0$ 时 b 应为偶数
4	根轨迹的渐近线	有 $n - m$ 条渐近线, 它们与实轴交于同一点, 交点的坐标为: $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n - m} \quad (-\infty \leq K_g \leq +\infty)$ 渐近线的相角为: $\varphi_a = \pm \frac{(2k+1) \times 180^\circ}{n - m} \quad (K_g \geq 0)$ 或 $\varphi_a = \frac{2k \times 180^\circ}{n - m} \quad (K_g \leq 0)$ 其中 $k = 0, 1, 2, \dots$
5	根轨迹的出射角和入射角	出射角 θ_{pk} 确定根轨迹离开开环复极点 $-p_k$ 的起始方向, 入射角 θ_{zl} 确定根轨迹进入开环复零点 $-z_l$ 的终止方向。 $\sum_{i=1}^n \angle(-p_k + z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \angle(-p_k + p_j) = \begin{cases} \theta_{pk} - 180^\circ & (K_g \geq 0) \\ \theta_{pk} & (K_g \leq 0) \end{cases}$ $-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^m \angle(-z_l + z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(-z_l + p_j) = \begin{cases} \theta_{zl} - 180^\circ & (K_g \geq 0) \\ \theta_{zl} & (K_g \leq 0) \end{cases}$
6	根轨迹的分离点(或会合点)	若分离点坐标为 d , 则必须满足下列方程(必要条件而非充分条件): $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d + z_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d + p_j} \text{ 或为方程 } \frac{d}{ds} [G(s)H(s)] = 0 \text{ 的根}$ l 条根轨迹进入分离点的切线方向与离开同一分离点的切线方向之间的夹角为 $\varphi = \pm \frac{\pi}{l}$
7	根轨迹与虚轴的交点	根轨迹与虚轴交点的 K_g 和 ω 值利用劳斯判据(首行出现零时), 或以 $s = j\omega$ 代入特征方程, 令实部和虚部为零求之
8	根轨迹的走向	当 $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和, 且与 K_g 无关。若一些根轨迹分支向左移动, 则另一些分支向右移动

4.4 广义根轨迹(或参数根轨迹)和根轨迹簇

1. 广义根轨迹

除根轨迹增益 K_g 以外, 系统其它参数变化时的根轨迹称为广义根轨迹(或参数根轨迹)。为利用上节的基本法则, 应在保持闭环特征方程的根不变的原则下, 作等效变换, 使可变参数 α 位于式(4-1)中常规根轨迹增益 K_g 的位置。

设系统的闭环特征方程为: $1 + G(s)H(s) = 0$

以其中不含可变参数 α 的各项除以方程的两边, 并将它改写成:

$$\alpha \frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

其中 α 为可变参数(或是与可变参数成比例的变量), 而 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 是两个与 α 无关的首元系数为 1 的多项式。

由此得系统的等效开环传递函数为: $G_1(s)H_1(s) = \alpha \frac{P(s)}{Q(s)}$

根据上式, 按表 4.1 的根轨迹绘制法可画出等效系统的根轨迹, 就是原系统的广义根轨迹。注意: 等效开环传递函数的零点不是原系统的闭环零点。

2. 根轨迹簇

当系统中多个参数变化时, 可选定某个可变参数作上述等效变换, 对于其它可变参数的每一组值, 都可作出相应的广义根轨迹, 这样获得的一簇根轨迹称为根轨迹簇。

4.5 利用根轨迹法分析和估算系统的性能

利用根轨迹图, 可以了解系统闭环极点的分布情况; 也可确定可变参数为某一值时, 闭环极点的位置; 再根据闭环传递函数, 可确定相应的零点。由闭环极点和零点的分布, 可以定性分析和定量估算系统的基本性能。

(1) **稳定性:** 系统稳定性只取决于闭环极点在 S 平面上的位置。如果极点全部位于左半 S 平面, 则系统是稳定的。由根轨迹与虚轴的交点, 可以确定系统临界稳定时的参数值。

(2) **运动形式:** 如果闭环系统无零点, 且闭环极点均为实数极点, 则时间响应一定是单调的; 如果闭环极点均为复数极点, 则系统时间响应一定是振荡的。

(3) **主导极点:** S 平面上最靠近虚轴而附近又无闭环零点的一些闭环极点对系统性能影响最大, 称为主导极点。凡实部比主导极点实部大 5 倍以上的其它闭环零、极点对系统的影响可以忽略。

(4) **超调量:** 超调量主要取决于闭环复数主导极点的衰减率 $\frac{\sigma_1}{\omega_d} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, 并与其它闭环零极点接近坐标原点的程度有关。

(5) **调节时间:** 调节时间主要取决于闭环复数主导极点的实部绝对值 $\sigma_1 = \xi\omega_d$; 如果实数极点距虚轴最近, 且它附近没有实零点, 则调节时间主要取决于该实数极点的模值。

(6) **实数零、极点的影响**:如果除了主导极点之外,系统还具有若干实数零、极点,则零点的存在减小系统阻尼,使响应速度加快,超调增加;极点的存在增大系统阻尼,使响应速度减慢,超调减小。它们的作用随它们接近坐标原点的程度而加强。

(7) **偶极子及其处理**:如果零、极点之间的距离比它们至主导极点的距离小一个数量级,则它们构成偶极子。远离原点的偶极子,其影响可以忽略;接近原点的偶极子,其影响必须考虑。

4.6 例题讲解

本章重点是能根据系统已知的条件,正确画出根轨迹。

为了正确绘制根轨迹,不仅要记住表 4.1 所给出的基本规则,而且要理解基本规则是由相角条件得出的;相角条件是绘制根轨迹的基本点;要求根轨迹上某确定点(闭环极点)的开环增益时,用幅值条件。另外要注意以下几点:

(1) 规则 6 所求出的方程根,可能是分离点,也可能不是分离点,但方程的根必包含有分离点。确切地讲,方程根的坐标同时满足相角条件时,才是分离点。

分离点可以是实数,也可以是复数。若实轴上两相邻的开环极点或两相邻的开环零点之间的区域为根轨迹上的线段,则在该线段上至少有一个分离点。

另外需要强调的是,当存在多个有效的分离点时,要区分先出现哪个分离点,后出现哪个分离点,即要注意各分离点所对应的 K_g 值的大小。

(2) 在运用规则 3 计算区间右边开环实数极点和零点个数之和时,注意右边出现相重的实数极点或零点时,之和应包含相重的个数;另外,右边开环实数极点和零点是指标右边开环有限实数极点和零点,不包括无穷远的零极点。

(3) 应用规则 8 时,应注意与虚轴交点的 K_g 的正负性。对于常规根轨迹, $K_g > 0$;而对于零度根轨迹, $K_g < 0$ 。参见例 4.1(2)c。

(4) 对于零度根轨迹,当 $n = m$ 且 $K_g = -1$ 时,根轨迹发生跳跃,参见例 4.9 中的讨论。此时特征方程从 n 次下降到 $n-1$ 次;所少的一个极点为点 $(\pm\infty, j0)$ ($K_g = -1$ 时),且此时实轴的最右部和最左部在同一条根轨迹上;该条根轨迹在 $+\infty(-\infty)$ 处发生跳跃,即是从 $(+\infty, j0)$ 跃变到 $(-\infty, j0)$, 或从 $(-\infty, j0)$ 跃变到 $(+\infty, j0)$ 。

(5) 应灵活运用规则,特别是规则 8 对于根轨迹的走向具有指导作用。

(6) 能正确掌握广义根轨迹和零度根轨迹的概念,以及其绘制方法。对于广义根轨迹,运用等效开环传递函数时,需注意的是等效开环传递函数对应的闭环特征方程与原系统相同,但其对应的零点与原系统不同,确定系统闭环零点时,必须由原系统开环传递函数确定。

例 4.1 试讨论开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$ 的根轨迹特性。

解 $-p_1, -p_2$ 为两个开环极点,它们可以全是实数或者是一对共轭复数, $-z$ 为开环实零点。闭环特征方程为: $(s+p_1)(s+p_2) + K(s+z) = 0$

即 $s^2 + (p_1 + p_2 + K)s + p_1 p_2 + Kz = 0$

令 $s = \sigma + j\omega$ 代入上式得:

70 —

$$(\delta^2 - \omega^2 + j2\delta\omega) + (p_1 + p_2 + K)(\delta + j\omega) + p_1 p_2 + Kz = 0$$

上式成立必有实部和虚部同时为0,即

$$\begin{cases} \delta^2 - \omega^2 + (p_1 + p_2 + K)\delta + p_1 p_2 + Kz = 0 \\ 2\delta\omega + (p_1 + p_2 + K)\omega = 0 \end{cases}$$

当 $\omega \neq 0$ 时, 消去上二式中的 K 得:

$$\delta^2 + 2\delta z + \omega^2 = p_1 p_2 - z(p_1 + p_2)$$

即

$$(\delta + z)^2 + \omega^2 = (p_1 - z)(p_2 - z)$$

当 $(p_1 - z)(p_2 - z) > 0$ 时, 上式为圆的方程, 圆心为 $(-z, 0)$, 半径为 $\sqrt{(p_1 - z)(p_2 - z)}$ 。

由 $\frac{dK}{ds} = 0$ 分离点的必要条件得:

$$s^2 + 2zs - p_1 p_2 + (p_1 + p_2)z = 0 \quad s_{1,2} = -z \pm \sqrt{(p_1 - z)(p_2 - z)}$$

当 $(p_1 - z)(p_2 - z) > 0$ 时, 可能存在分离点。(说明: $(p_1 - z)(p_2 - z) < 0$ 时, $s_{1,2}$ 为一对复数; 出现一对复数的分离点, 根轨迹条数必为四条以上。本题只有两条根轨迹, 所以不存在一对复数的分离点。)

下面分两种情况讨论:

(1) 当 p_1, p_2 为一对共轭复数时, 实轴上 $(-\infty, -z]$ 在根轨迹上; 由于 p_1, p_2 为一对共轭复数, 所以 $(p_1 - z)(p_2 - z) > 0$, 根据上述圆的方程可知, $\omega \neq 0$ 时, 根轨迹为圆, 有一个分离点为 $s_1 = -z - \sqrt{(p_1 - z)(p_2 - z)}$ 。根轨迹见图 4-2(a) 所示。

(2) 当 p_1, p_2 全为实数时, 分三种情况讨论:

a) 当 $z > p_1 > p_2$ 时, 即零点在极点左侧时, 实轴上 $(-\infty, -z]$ 及 $[-p_1, -p_2]$ 在根轨迹上。

因为

$$z > p_1 > p_2$$

所以

$$(p_1 - z)(p_2 - z) > 0$$

根据圆的方程可知, $\omega \neq 0$ 时, 根轨迹为一个完整圆, 见图 4-2(b)。有两个分离点为 $s_{1,2} (s_2 < -z, -p_1 < s_1 < -p_2)$ 。

b) 当 $p_2 > z > p_1$ 时, 即零点在两极点之间, 实轴上 $(-\infty, -p_2]$ 及 $[-z, -p_1]$ 在根轨迹上。

因为 $(p_1 - z)(p_2 - z) < 0$, 所以在 $\omega \neq 0$ 的情况下不存在圆, 即没有复根轨迹, 见图 4-2(c)。

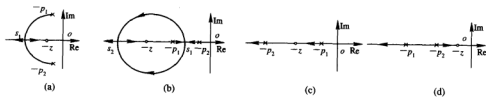


图 4-2

c) 当 $p_1 > p_2 > z$ 时, 即零点在两极点的右侧, 实轴上 $(-\infty, -p_1)$ 及 $[-p_2, -z]$ 在根轨迹上。此时有 $(p_1 - z)(p_2 - z) > 0$, 虽然圆的方程成立, 但由 $\omega \neq 0$ 时的特征方程的虚部为零可知 $K = -p_1 - p_2 - 2\delta$, 出现 $K < 0$, 上述圆的方程应是 $K < 0$ 时根轨迹的复数部分。所以 $K > 0$ 时, 无复根轨迹部分, 见图 4-2(d)。

例 4.2 已知系统的开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图;

(2) 为使系统的阶跃响应呈现衰减形式, 试确定 K 值范围。

解 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{4K}{s(s+1)(s+4)} = \frac{K_g}{s(s+1)(s+4)}$$

其中 $K_g = 4K$ 。

① 开环极点 0, -1, -4, 它们三条根轨迹起点。系统无有限开环零点, 故根轨迹各分支将趋向于无穷远点。

② 根轨迹的渐近线: $\delta_a = \frac{-1-4-0}{3-0} = -1.67$

$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{3-0} (k=0, 1, 2)$ 即 $\varphi_k = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

③ 实轴上根轨迹区间是 $(-\infty, -4]$ 及 $[-1, 0]$ 。

④ 求根轨迹分离点。由 $G(s)H(s) = -1$ 得: $K_g = -s(s+1)(s+4)$

由 $\frac{dK_g}{ds} = 0$ 得: $s_1 = -0.46, s_2 = -2.87$

由③知 s_2 不在根轨迹上, 故 s_1 是根轨迹的分离点, 分离角为 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 。

⑤ 求根轨迹与虚轴的交点。闭环特征方程为:

$$s^3 + 5s^2 + 4s + K_g = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 5 & K_g \end{array}$$

劳斯表为: $\begin{array}{ccc} s^1 & \frac{20-K_g}{5} & 0 \end{array}$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & K_g & \end{array}$$

第一列出现零即 $K_g = 20$ 时系统处于临界稳定, 其对应的临界开环增益为 $K = K_g/4 = 5$ 。

相应的辅助方程为 $5s^2 + K_g = 0$, 即 $5s^2 + 20 = 0$; 与虚轴的交点为 $s = \pm j\omega = j2$ 。

求交点也可用如下方法:

令 $s = j\omega$, 代入特征方程得 $K_g - 5\omega^2 + j(4 - \omega^2)\omega = 0$, 解得

$$\begin{cases} 4 - \omega^2 = 0 \\ K_g - 5\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 2 \\ K_g = 20 \end{cases}$$

系统的大致根轨迹如图 4-3 所示。

确定 K 值范围: 与分离点 s_1 相应的

$$K_g = \{ |s| \cdot |s+1| \cdot |s+4| \}_{s=-0.46} = 0.88$$

$$K = K_g/4 = 0.22$$

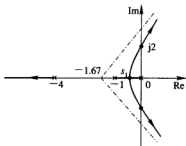
因此, 若使系统在阶跃响应下为衰减振荡型, K 的取值范围应为 $0.22 < K < 5$ 。

例 4.3 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制系统的根轨迹。

图 4-3



解 ① 系统 $n=4$, $m=1$, 其开环零极点为 $z=-2$, $p_1=0$, $p_2=-3$, $p_{3,4}=-1\pm j$, 根轨迹共有四条分支, 其中一条分支终止于零点 -2 , 其余三条分支趋向于无穷远。

② 实轴上的根轨迹位于区间 $[-2, 0]$ 及 $(-\infty, -3]$ 。

③ 渐近线的相角:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4-1} = \pm 60^\circ, 180^\circ (k=-1, 0, 1)$$

渐近线与实轴的交点:

$$\delta_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) = \frac{1}{4-1} (0-3-1+j-1-j+2) = -1$$

④ 根轨迹的一条分支起始于极点 $p_1=0$, 沿负实轴终止于零点 $z=-2$; 一条分支起始于极点 $p_2=-3$, 沿负实轴趋向于 $-\infty$; 其余的两条分支起始于共轭复数极点 $p_{3,4}=-1\pm j$, 沿渐近线趋向于无穷远处。可见不存在分离点。

⑤ 根轨迹与虚轴交点:

系统特征方程为 $s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (6+k)s + 2k = 0$

s^4	1	8	$2K$
s^3	5	$6+K$	
s^2	$\frac{40-(6+K)}{5}$	$2K$	
s^1	$6+K-\frac{50K}{34-K}$	0	
s^0	$2K$		

系统处于临界状态时, 由 s^1 行首列为零得 $6+K-\frac{50K}{34-K}=0$, 解得 $K=7.03$ 。

辅助方程

$$\frac{40-(6+K)}{5}s^2 + 2K = 0$$

即 $27s^2 + 70 = 0$ 。

解得与虚轴交点为 $s = \pm j1.61$ 。

⑥ 求 $p_{3,4}$ 起点的出射角。

$$\begin{aligned}\varphi'_3 &= 180^\circ + \left[\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s-p_i) \right]_{s=p_3} \\ &= 180^\circ + [\angle(p_3+2) - \angle p_3 - \angle(p_3+3) - \angle(p_3+1+j)] \\ &= 180^\circ + 45^\circ - 135^\circ - 26.6^\circ - 90^\circ = -26.6^\circ\end{aligned}$$

根据根轨迹关于实轴对称的特点, 可知极点 $p_4 = -1-j$ 的出射角为 26.6° 。

渐近线与虚轴交点为 $1 \times \tan 60^\circ = 1.732 > 1.614$ 。

第三、四条根轨迹分别穿过 $+60^\circ$ 和 -60° 方向渐近线与虚轴相交于 $s = \pm j1.61$, 然后沿渐近方向趋于无穷远。根轨迹大致图形如图 4-4 所示。

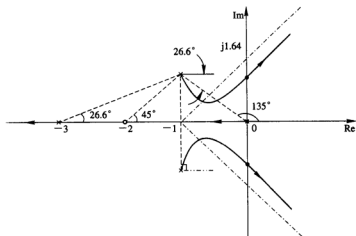


图 4-4

例 4.4 试绘制开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$ 的系统根轨迹。

解 ① 系统 $n = 4, m = 1$, 共有四条分支。起点为开环极点 $-2 \pm j\sqrt{5}$ (注意它们是重极点 $p_1 = p_2 = -2 + j\sqrt{5}, p_3 = p_4 = -2 - j\sqrt{5}$), 所以从每个点各有两条根轨迹射出, 有一条根轨迹终止于开环零点 -2 , 另三条趋于无穷远零点。

② 实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty, -2]$ 。

③ 三条渐近线的方向为: $\phi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$

渐近线与实轴交点的坐标为: $\delta = \frac{[(-2-j\sqrt{5}) \times 2 + (-2+j\sqrt{5}) \times 2 + 2]}{4-1} = -2$

④ 复极点的出射角:

设 p_1 点出射角为 θ_1 , 由相角条件得:

$$[\angle(s-z) - \sum_{i=1}^4 \angle(s-p_i)]_{s=p_1} = (2k+1)\pi$$

即

$$\angle(p_1-z) - [\angle(s-p_1) + \angle(s-p_2)]_{s=p_1} - \angle(p_1-p_3) - \angle(p_1-p_4) = (2k+1)\pi$$

因为 $\theta_1 = [\angle(s - p_1)]_{s=p_1}$ 又 $p_1 = p_2$

所以 $\angle(s - p_2) = \theta_1$

$$\angle(p_1 - z) = \angle(-2 + j5 + 2) = 90^\circ$$

$$\angle(p_1 - p_3) = \angle[-2 + j5 - (-2 - j5)] = \angle j10 = 90^\circ$$

所以有 $2\theta_1 = -(2k+1)\pi + [90^\circ - (90^\circ + 90^\circ)] = -(2k+1)\pi - 90^\circ$

当 $k=0$ 时, $\theta_1 = -\frac{3\pi}{4}$; 当 $k=-1$ 时, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 。

由根轨迹对称性可知, 极点 $p_3(p_4)$ 的出射角为 -45° 和 135° 。

⑤ 求分离点:

$$\text{由 } G(s) = -1, \text{ 得 } K = -\frac{(s^2 + 4s + 9)^2}{s + 2}$$

$$\text{令 } \frac{dK}{ds} = 0, \text{ 得 } K(s+2)[(s^2 + 4s + 9)^2]' - [K(s+2)]'(s^2 + 4s + 9)^2 = 0$$

$$\text{解得 } s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{5}, s_3 = -0.71, s_4 = -3.29$$

$s_{1,2}$ 表明主极点本身是分离点, $s_3 = -0.71$ 不在根轨迹上, 应舍去, $s_4 = -3.29$ 在区间 $(-\infty, -2]$ 内, 是根轨迹的分离点。

⑥ 求根轨迹与虚轴交点:

系统特征方程为

$$(s^2 + 4s + 9)^2 + K(s + 2) = 0$$

令 $s = j\omega$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} \omega^4 - 34\omega^2 + 81 + 2K = 0 \\ -8\omega^3 + (72 + K)\omega = 0 \end{cases}$$

解此方程组, 并舍去无意义的解后得

$$\omega = \pm \sqrt{21} = \pm 4.58; \text{ 相应的 } K = 96.$$

根轨迹大致图形如图 4-5 所示。

讨论: 注意由于起点为两条根轨迹起点, 所以有两个出射角。当起点仅为一条根轨迹起点时, 只有一个出射角。

出射角表达式常用下列形式:

$$\theta = -180^\circ + \left[\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s - p_i) \right]$$

或

$$\theta = +180^\circ + \left[\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s - p_i) \right]$$

但是对于同一起点 p 若为 γ 条根轨迹起点时, 出射角公式为:

$$\gamma \cdot \theta = (2k+1)\pi + \left[\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n-\gamma} \angle(s - p_i) \right]_{s=p}$$

k 可取 γ 个不同的整数。

同理, 若 z 为 γ 条根轨迹的终点, 有 γ 个方向的入射角:

$$\gamma \cdot \theta_k = (2k+1)\pi - \left[\sum_{j=1}^{m-\gamma} \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) \right]_{s=z}$$

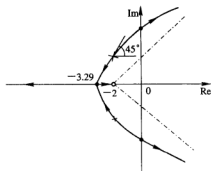


图 4-5

另外,在绘制根轨迹时,可以利用当 $n-m \geq 2$ 时,开环极点之和等于闭环极点之和的特性。本题有式 $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 2(-2 + j\sqrt{5}) + 2(-2 - j\sqrt{5}) = -8$ 。再根据特征方程 $(s^2 + 4s + 9)^2 + K(s + 2) = 0$, 有闭环极点之积等于特征方程的常数项。本例有 $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 = 9^2 + 2K$, 对于与虚轴交点有 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{21}$, 相应地有

$$\begin{cases} s_2 + s_4 = -8 \\ s_3 \cdot s_4 = 13 \end{cases}, \text{解得 } s_3 = -2.27, s_4 = -5.73.$$

例 4.5 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$, 当系统分别为负反馈和正反馈时,欲都能保证闭环系统稳定性,试确定根轨迹增益 K 的范围。

解 本题实际上是在满足系统闭环稳定的条件下,分别求出负反馈时的 K 值范围 (a, b) 和正反馈时的 K 值范围 (c, d) , 区间 (a, b) 与区间 (c, d) 的公共区间即交集,即可保证无论是正反馈还是负反馈,系统都是稳定的。负反馈时为常规根轨迹,正反馈时为零度根轨迹。

系统 $n = 4, m = 0$ 有四条根轨迹,分别起于开环极点 $p_{1,2} = -1 \pm j2$ 和 $p_{3,4} = -1 \pm j$, 沿渐近线方向终于无穷远处。

(1) 负反馈时(即画常规根轨迹或 $K > 0$):

① 实轴上无根轨迹区间。

② 渐近线方向为:

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4-0} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

渐近线与实轴交点为:

$$\sigma = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{n-m} = \frac{-1 \times 2 + (-1) \times 2}{4} = -1$$

③ 出射角:

$$\theta_1 = -180^\circ - \left[\sum_{i=2}^4 \angle(s - p_i) \right]_{s \rightarrow p_1} = -180^\circ - [-90^\circ - 90^\circ - 90^\circ] = -90^\circ$$

$$\theta_3 = -180^\circ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^4 \angle(s - p_i) = -180^\circ - [-90^\circ + 90^\circ + 90^\circ] = -270^\circ$$

根据根轨迹关于实轴的对称性可知 $\theta_2 = 90^\circ, \theta_4 = 270^\circ$ 。

④ 求分离点:

由 $G(s)H(s) = -1$ 得

$$K = -(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)$$

令 $\frac{dK}{ds} = 0$, 得

$$2(s+1)(s^2+2s+5) + 2(s+1)(s^2+2s+2) = 0$$

解得 $d_1 = -1, d_{2,3} = -1 \pm j1.581$, 其相应的 K 值为 $K_1 = -4, K_{2,3} = 2.25; d_1 = -1$ 应舍去, 此时相应的 K_1 小于零。

显然 $d_{2,3}$ 为常规根轨迹的复分离点(因为 $K_{2,3}$ 为大于零的实数)。同样可以用相角条件说明:

设 $s = \delta + j\omega = -1 + j\omega$, ω 在 $1 < \omega < 2$ 区间位于根轨迹上, 因为此时有:

$$\begin{aligned} & -\angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_3) - \angle(s-p_4) \\ &= -\angle j(\omega-2) - \angle j(\omega+2) - \angle j(\omega-1) - \angle j(\omega+1) \\ &= -(-90^\circ) - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -180^\circ = (2k+1)180^\circ \quad (k=-1) \end{aligned}$$

即 ω 在 $1 < \omega < 2$ 上满足相角条件。

⑤ 求与虚轴交点:

系统闭环特征方程为:

$$(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5) + K = s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + K + 10 = 0$$

$$\begin{array}{rcll} s^4 & 1 & 11 & 10+K \\ s^3 & 4 & 14 & \end{array}$$

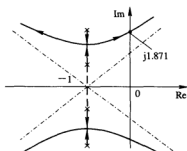
劳斯表为:

$$\begin{array}{rcl} s^2 & 7.5 & 10+K \\ s^1 & \frac{65-4K}{7.5} & \\ s^0 & 10+JK & \end{array}$$

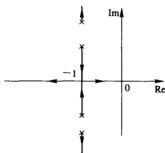
令 s^1 行全为零, 得 $\frac{65-4K}{7.5} = 0$, 解得 $K = \frac{65}{4} = 16.25$

辅助方程为 $A(s) = 7.5s^2 + 10 + K = 7.5s^2 + 10 + \frac{65}{4} = 0$, 解得 $s_{1,2} = \pm j1.871$

常规根轨迹见图 4-6(a)。



(a)



(b)

图 4-6

(2) 为正反馈时(即零度根轨迹或 $K < 0$ 时):

① 起点和终点与常规根轨迹相同。

② 实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty, +\infty)$ 。

③ 渐近线方向为 $\varphi = \frac{2k\pi}{n-m} = \frac{2k\pi}{4} = 0, \pm 90^\circ, 180^\circ$, 渐近线与实轴交点与常规根迹相同。

④ 出射角: 零度根轨迹与常规根轨迹的出射角相差一个 180° 。

$$\begin{cases} \theta_1 = [-\angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_3)]_{s=p_1} = +90^\circ \\ \theta_3 = [-\angle(s-p_1) - \angle(s-p_2) - \angle(s-p_4)]_{s=p_2} = -90^\circ \end{cases} \quad \text{同理} \begin{cases} \theta_2 = -90^\circ \\ \theta_4 = +90^\circ \end{cases}$$

⑤ 分离点, 同上, 令 $\frac{dK}{ds} = 0$, 得 $d_1 = -1$, $d_{2,3} = -1 + j1.581$

因为 $d_{2,3} = -1 \pm j1.581 \in [-1 \pm j1, -1 \pm j2]$, 属于常规根轨迹, 所以此时 $d_{2,3}$ 应舍去, 而 $d_1 = -1$ 时位于实轴上根轨迹内, 即 $d_1 = -1$ 为分离点。

⑥ 与虚轴交点, 同样用劳斯表, 得 $K = +16.25$ 时与虚轴相交, 这与 $K < 0$ 条件不符; 对于劳斯表, s^0 为零时 $K = -10$, 此时与虚轴交点即为 $s = 0$ 。

⑦ 利用相角条件可证明, 当 $s = -1 + j\omega$ 时, ω 在 $[-1, +1]$ 以及 $[+2, +\infty)$ 和 $[-2, -\infty)$ 区间, 点 s 在零度根轨迹上。见图 4-6(b)。

从上可知, 负反馈时 K 值范围为 $(0, 16.25)$, 正反馈时 K 值范围为 $(0, 10)$, 因此使系统在正负反馈下同时稳定的 K 值范围为 $(0, 10)$ 。

例 4.6 设系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+1)^3}{(s+2)^3}$, 绘制其根轨迹。

解 系统 $n = m = 3$, 根轨迹有 3 条分支, 每条分支都起于开环极点 $p = -2$, 终于开环零点 $z = -1$, 注意零极点 z, p 都是三重根。

(1) 实轴上根轨迹区间为 $[-2, -1]$ 。

(2) 出射角为 θ_1 , 由于 p 为三重根, 所以

$$\begin{aligned} 3\theta_1 &= (2k+1)\pi + \left[\sum_{i=1}^3 \angle(s-z_i) \right]_{s=p} \\ &= (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^3 \angle(-2+1) = 2(k-1)\pi \end{aligned}$$

所以 $\theta_1 = 0^\circ, \pm 120^\circ; k = +1, +2, 0$ 。

求入射角 θ_2 : 同理点 z 为三条分支的终点, 故

$$\begin{aligned} 3\theta_2 &= (2k+1)\pi + \left[\sum_{i=1}^3 \angle(s-p_i) \right]_{s=z} \\ &= (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^3 \angle(-1+2) = (2k+1)\pi \end{aligned}$$

所以 $\theta_2 = \pm 60^\circ, 180^\circ; k = 0, -1, +1$ 。

(3) 无分离点, 与虚轴无交点。根轨迹见图 4-7。

例 4.7 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) =$

$\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$, 试绘制系统的根轨迹, 并确定系统输出无衰减振荡分量时的闭环传递函数。

解 ① $n = 4, m = 0$, 根轨迹为 4 个分支, 分别起于开环极点 $0, -2, -1 \pm j$, 并都终于无穷远点。

② 实轴上根轨迹的区间为 $[-2, 0]$ 。

③ 渐近线方向为:

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4-0} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

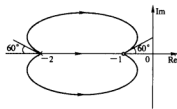


图 4-7

$k = 0, \pm 1, -2$

渐近线的实轴交点为: $\delta_s = \frac{0-2-1+j-1-j}{4-0} = -1$

④ 求分离点: 由

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+1-j} + \frac{1}{d+1+j} = 0$$

得 $d = -1$, 其所对应的 k 值为

$$K = |d-0| \cdot |d+2| \cdot |d+1+j| \cdot |d+1-j| = 1$$

⑤ 求分离角 θ : 实轴上 $d = -1$ 为 4 条根轨迹分支的交点, 为四重根, 将 $d = -1$ 看成根轨迹新的起点, 利用相角条件有:

$$4\theta = (2k+1)\pi, \theta = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ; k = 0, \pm 1, -2 \text{ (注意与渐近线方向相同)}$$

⑥ 求与虚轴交点: 系统特征方程为

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + K = 0$$

令 $s = j\omega$, 解得

$$\begin{cases} -4\omega^3 + 4\omega = 0 \\ \omega^4 - 6\omega^2 + K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 1 \\ K = 5 \end{cases}$$

与虚轴交点为 $\pm j1$ (注意该交点在渐近线上)。

⑦ 根轨迹的出射角 $\theta = \pm 90^\circ$ 。系统的根轨迹如图 4-8 所示。

由图 4-8 可见, 4 条根轨迹在实轴上 $(-1, 0)$ 点汇合后将沿渐近线趋向于无穷远点, 分离后的根轨迹与渐近线重合 (可用相角条件证明)。要使闭环系统的输出无衰减振荡分量, 则闭环系统应无共轭复数的极点, 即闭环极点均应为实极点。显然只有 $s = -1$ 点能满足要求; 所以分离点处对应的四重极点即为所求的闭环极点。此时系统的闭环传递函数为 $\phi(s) = 1/(s+1)^4$ 。

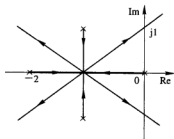


图 4-8

讨论: 根轨迹在一些特殊情况下是与渐近线重合的 (如本题)。另外从图 4-8 可见, 该题的根轨迹不仅上下对称, 而且左右对称。根轨迹关于实轴对称是一般性的结论: 当开环零极点个数均为偶数, 且左右对称分布于一条平行于虚轴的直线时, 根轨迹也一定关于该直线左右对称, 也就是说根轨迹左右对称在特殊情况下是成立的。在求实轴上的分离角时, 可用公式 $\theta = (2k+1)\pi/\gamma$ 来计算, 其中 γ 为分支数。

例 4.8 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(1+0.1s)}{s(s+1)(0.25s+1)^2}$, 试画出 $K < 0$ 时的根轨迹 (即零度根轨迹)。

$$\text{解 } G(s) = \frac{K(1+0.1s)}{s(s+1)(0.25s+1)^2} = \frac{K_s(s+10)}{s(s+1)(s+4)^2} \quad K_s = 1.6K$$

① $n = 4, m = 1$; 系统的根轨迹有 4 条分支, 起于开环极点 $0, -1, -4, -4$, 一条终于开环零点 -10 , 其它 3 条沿渐近线方向趋于无穷远。

② 实轴上的根轨迹为 $[0, +\infty)$ 和 $[-10, -1]$ 。

③ 渐近线方向为: $\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} = \frac{2k\pi}{4-1} = 0, \pm 120^\circ \quad k = 0, \pm 1$

与实轴交点为: $\delta_a = \frac{0-1-4-4+10}{4-1} = +0.33$

④ 求分离点: 由 $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{2}{d+4} = \frac{1}{d+10}$ 可求得 $d_1 = -0.45, d_2 = -2.25, d_3 = -12.5$ 。

$d_2 = -2.25$ 在区间 $[-10, -1]$ 内, 是分离点; d_1 和 d_3 不在实轴上的根轨迹内, 应舍去。

⑤ 与虚轴无交点(除了起点 0)。

系统的根轨迹如图 4-9 所示。

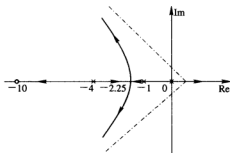


图 4-9

讨论: 零度根轨迹的作图过程与常规根轨迹基本相同, 仅相角条件发生 180° 的变化, 即从常规的 $(2k+1)\pi$ 变为 $2k\pi$ 。另外需指出的是, 对于零度根轨迹, 当 $n=m$ 时, 零度根轨迹在 $K=-1$ 处存在间断点。

若开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)}$ 。当 $n=m$ 且 $K=-1$ 时, 闭环特征方

程从 n 阶降为 $n-1$; 此时有 $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} G(s)H(s) = K = -1$, 即 $s \rightarrow \pm\infty$ 时有 $1+G(s)H(s) = 0$; 或者理解为 $n=m$ 且 $K=-1$ 时, $s \rightarrow \pm\infty$ 为系统的闭环极点。例如 $G(s)H(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s+2)(s+3)}$ 的零度根轨迹见图 4-10; 图中区间 $[-2, -1]$ 为一条分支, $-2 \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty \rightarrow 0$ 为另一条分支。

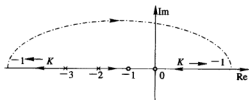


图 4-10

例 4.9 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10(1-s)}{(0.5s+1)(Ts+1)}$

- (1) 作出 T 变化时闭环系统的根轨迹。
- (2) 求出系统处于临界稳定和临界阻尼时的 T 值。
- (3) 求出当 $T = 20$ 时, 闭环系统的单位阶跃响应。

解 系统的特征方程为 $(0.5s+1)(Ts+1)+10(1-s)=0$, 整理得

$$(11-9.5s)+Ts(0.5s+1)=0$$

即 $1 + \frac{Ts(0.5s+1)}{11-9.5s} = 0$ 令 $T_1 = \frac{T}{2 \times 9.5}$ 得 $1 - \frac{T_1 s(s+2)}{s-11/9.5} = 0$

系统的等效开环传递函数为: $G_1(s)H_1(s) = \frac{T_1 s(s+2)}{s-11/9.5}$

由上式可画出以 T_1 为参变量的广义根轨迹。从特征方程可知, 该广义根轨迹为零度根轨迹。

(1) 由等效开环传递函数可知 $n=1, m=2$, 此时 $n < m$, 有 $|n-m|=1$ 个开环极点位于 $+\infty$ 。

- ① 系统根轨迹有 2 条分支, 起始于 $1.16, +\infty$; 终止于 $0, -2$ 。
- ② 实轴上根轨迹区间是 $[-2, 0], [1.16, +\infty)$ 。
- ③ 令 $s = \delta + j\omega$, 代入特征方程有:

$$\angle(\delta + j\omega) + \angle(\delta + 2 + j\omega) - \angle\left(\delta - \frac{11}{9.5} + j\omega\right) = 2k\pi$$

经整理得

$$(\delta - 1.16)^2 + \omega^2 = 1.91^2$$

可见复平面上的根轨迹是以有限值的极点 $-s = 1.16$ 为圆心, 以 $R = 1.91$ 为半径的圆。

根据圆的方程可知, 分离点为 $1.16+1.91=3.07$ 和 $1.16-1.91=-0.75$ 。

(分离点也可用 $\frac{dT_1}{ds} = 0$ 求解而得)

④ 求与虚轴交点: 令 $s = j\omega (\omega \neq 0)$, 代入特征方程得:

$$\begin{cases} (2T_1 - 1)\omega = 0 & T_1 = 1/2 \\ -T_1\omega^2 + \frac{11}{9.5} = 0 & \omega = \pm 1.5 \end{cases}$$

则 $T = 2 \times 9.5 \times 0.5 = 9.5$

系统的广义根轨迹见图 4-11。

(2) 由以上可知系统临界稳定时闭环极点为 $s_{1,2} = \pm j1.5$, 此时 $T = 9.5$ 。

所以, 当 $T > 9.5$ 时, 系统稳定。

系统处于临界阻尼时, 闭环极点为 $s_{3,4} = -0.75$, 其相应的 T_1 为:

$$T_1 = \left\{ \left| s - \frac{11}{9.5} \right| / (|s| \cdot |s+2|) \right\}_{s=-0.75} = \frac{1.16+0.75}{0.75 \times 1.25} = 2.04$$

故系统处于临界阻尼时 $T = 2 \times 9.5 \times T_1 = 38.76$ 。

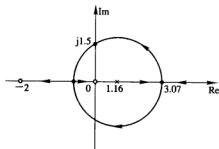


图 4-11

(3) 当 $T = 20$ 时, 系统的闭环传递函数为:

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1-s}{s^2 + 1.05s + 1.1}$$

输出的拉氏表达式为:

$$\begin{aligned} C(s) &= \phi(s)R(s) = \frac{1-s}{s^2 + 1.05s + 1.1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{10/11}{s} + \frac{-0.45 - j0.812}{s + 0.525 + j0.908} + \frac{0.454 + j0.812}{s + 0.525 - j0.928} \end{aligned}$$

对上式进行拉氏反变换得 $T = 20$ 时单位阶跃响应为:

$$C(s) = \frac{10}{11} + 1.86e^{-0.525t} \cos\left(0.908t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

讨论: ① 广义根轨迹的画法是通过“等效”开环传递函数使变换前后系统的闭环极点不变而实现的, 其作图的基本过程与常规根轨迹、零度根轨迹相同。

② 另外, 需要指出的是本例中出现对 $n < m$ 情况的处理, 即分母次数小于分子次数时,

$$\text{若开环传递函数为: } G(s)H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + s_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = KG_0(s)$$

其特征方程为:

$$G(s)H(s) = -1$$

$$\text{令 } K = \frac{1}{K_1}, \text{ 即 } KG_0(s) = -1$$

则

$$K_1/G_0(s) = -1$$

$$\text{即 } K_1 \frac{\prod_{i=1}^m (s + p_i)}{\prod_{j=1}^n (s + s_j)} = -1, \text{ 该式有 } m-n \text{ 条渐近线, 显然渐近线方向以及与轴交点为:}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{m-n} (k > 0) \text{ 或 } \varphi_a = \frac{2k\pi}{m-n} (k < 0), \delta_a = \frac{-\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{i=1}^n p_i}{m-n}$$

这 $m-n$ 条渐近线是 $K_1 \rightarrow \infty$ 时的趋向, 也就是 $K \rightarrow 0$ 的趋向。

所以当 $n < m$ 时, 系统开环传递函数为 $G(s)H(s)$ 时其起点有 $m-n$ 个在无穷远处。

例 4.10 已知闭环系统特征方程为 $s^2(s+a) + K(s+1) = 0$

(1) 画出 $a = 10$ 时的根轨迹, 并说明系统的单调变化和阻尼振荡时 K 的取值范围。

(2) 确定根轨迹具有一个非零分离点时的 a 值, 并画出相应的根轨迹。

(3) 在(2)中确定的 a 值下求闭环传递函数上有三重极点时所对应的 K 值。

(4) 画出 $a = 5$ 时的根轨迹。当 $K = 12$ 时, 已知一个闭环极点为 $s_1 = -2$, 问该项系统能否等效为一个二阶系统?

$$\text{解 由特征方程求得开环传递函数为: } G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$$

$$\text{分离点满足 } \frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0 (\text{与由 } \frac{dK}{ds} = 0 \text{ 求分离点等价})。$$

解得分离点的表达式为 $d = -\frac{a+3}{4} \pm \sqrt{a^2 - 10a + 9}$ ，系统有 3 条根轨迹分支，起于

开环极点 0, 0, $-a$ ，一条终于 -1 ，另两条趋于无穷远。

(1) $a = 10$ 时，实轴上根轨迹区间为 $[-10, -1]$ (注意开环极点 $p = 0$ 处为二重极点)。

渐近线方向为： $\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ$

渐近线与实轴交点为： $\delta_a = \frac{-10+1}{3-1} = -4.5$

求分离点：将 $a = 10$ 代入上述分离点的表达式得 $d_{1,2} = -2.5, -4$ ；因 $d_{1,2}$ 在实轴的根轨迹上；所以分离点为 $d_{1,2}$ 。

$$\begin{cases} d_1 = -2.5 \text{ 时}, K_1 = \frac{2.5^2 \times (10 - 2.5)}{2.5 - 1} = 31.35 \\ d_2 = -4 \text{ 时}, K_2 = \frac{4^2 \times (10 - 4)}{4 - 1} = 32 \end{cases}$$

根轨迹与虚轴除原点外无交点。

根据以上结论可以将根轨迹绘制成如图 4-12 所示的两种情况。

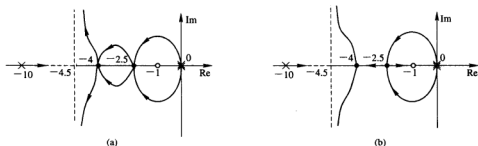


图 4-12

显然这两种情况中有且只有一个是正确的。

图 4-12(a)表明，根轨迹一条分支为从 -10 点起到 -1 点终，另两条分支起于 0 点，沿圆弧到分离点 -2.5 ，然后沿圆弧到分离点 -4 ，再沿渐近线趋于无穷远。作如下分析：对于实轴上 $d_2 = -4$ 至少是二重根，且三条分支都经过该点，则其是三重根，此时闭环极点之和为 $-4 \times 3 = -12$ ，它不等于开环极点之和 -10 。另外即使假设 $d_2 = -4$ 为二重根成立，与之相应的另一极点为 $-10 - (-4 \times 2) = -2$ ，而 -4 点和 -2 点分别为 -10 点起到 -1 点终这条根轨迹分支上的前后两点；若根轨迹的一条分支就为 -10 到 -1 ，必有 -2 点所对应的 K 大于 -4 点所对的 K ，所以不可能出现这条分支或这种情况 (三个闭环极点为 $-4, -4, -2$)。因而图 4-12(a)是错误的。

图 4-12(b)是正确的。两条分支起于原点，沿圆弧到分离点 -2.5 ，然后一条沿实轴到 -1 ，另一条沿实轴到 -4 与第三条起于 -10 沿实轴到 -4 的点会合，然后分离沿两条渐近线方向趋于无穷远。

从图 4-12(b)可知， $31.25 < K < 32$ 时，系统的过渡过程为单调的；当 $0 < K < 31.25$ 和 $32 < K < \infty$ 时，系统的过渡过程是阻尼振荡的。

(2) 分离点表达式为
$$d = -\frac{a+3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{a^2 - 10a + 9}$$

显然, 要使根轨迹只具有一个非零分离点, 必须 $a^2 - 10a + 9 = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = 9$ 。

当 $a = 1$ 时, 系统的根轨迹如图 4-13 所示。此时出现零极点抵消, 所求出的分离点 $d = -1$, 而此时并无分离点, 应舍去。

当 $a = 9$ 时, 求得 $\delta_0 = -4$, $\varphi_0 = \pm 90^\circ$, $d = -3$, 此时系统根轨迹见图 4-14。(注意此时 $d = -3$ 点为三重根)

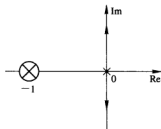


图 4-13

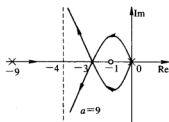


图 4-14

(3) 由图 4-14 可见, $a = 9$ 时, 分离点 $d = -3$ 对应的就是闭环系统的三重极点,

极点对应的 K 值为:
$$K = \left\{ \frac{|s| |s| \cdot |s+9|}{|s+1|} \right\}_{s=-3} = 27.$$

(4) 当 $a = 5$ 时, 求得 $\delta_0 = -2$, $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ 。

此时 d 为一对共轭复数, 所以根轨迹没有非零分离点(注意 d 为一对共轭复数时, 系统必至少有 4 条根轨迹分支, 才可能出现为复数的分离点)。此时根轨迹见图 4-15。

当 $K = 12$ 时, 已知一闭环极点为 $s_1 = -2$, 系统特征方程为:

$$s^3 + 5s^2 + 12s + 2 = 0$$

用 $s+2$ 除特征方程左侧, 得 $s^2 + 3s + 6 = 0$ 。

由 $s^2 + 3s + 6 = 0$ 得系统另两个极点为 $s_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$ 。

由主导极点概念可知, $\left| -2 / \left(-\frac{3}{2} \right) \right| = \frac{4}{3} < 5$ 所以当 $K = 12$ 时, 不能简化或等效为二阶系统。

例 4.11 已知比例-微分控制系统如图 4-16 所示, 试绘制 K 与 T 同时变化时的根轨迹簇 ($K \geq 0$, $T \geq 0$)。

解 系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 3s^2 + 2s + KT_s + K = 0$$

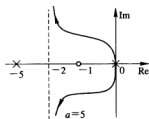


图 4-15



图 4-16

有

$$1 + \frac{KTs}{s^3 + s^2 + 2s + K} = 0$$

等效开环传递函数为：

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{KTs}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

等效开环的特征方程为：

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\text{有 } 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0; \text{ 设 } G_2(s)H_2(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

对于 $G_2(s)H_2(s)$ ：实轴上根轨迹区间为 $[-1, 0]$ 和 $(-\infty, -2]$ ；渐近线 $\varphi_a = \pm 60^\circ$ ， $\delta_a = \frac{-1-2}{3} = -1$ ，分离点为 $d = -0.423$ ；与虚轴交点为 $\pm j\sqrt{2}$ ，见图 4-17(a)。当 T 变化时，系统的根轨迹的起点位于图 4-17(a)所示的根轨迹上。

由幅值条件可知，当 $d = -0.423$ 时，所对应的 $K = |d| |d+1| |d+2| = 0.385$ 。

当 $K \leq 0.385$ 时，等效系统的开环有限极点皆为实数；当 $K > 0.385$ 时等效系统的开环极点有一对共轭复数。

$K \leq 0.385$ 时， $G_1(s)H_1(s)$ 所对应的根轨迹见图 4-17(b)。

$K > 0.385$ 时， $G_1(s)H_1(s)$ 所对应的根轨迹见图 4-17(c)。

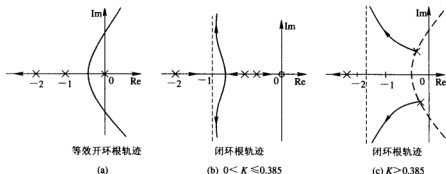


图 4-17

讨论：对于多回路根轨迹的画法，由内向外逐层绘制，内环的闭环极点即为外环的开环极点，内环反馈通道的极点是外环的开环零点。

对于多参数的根轨迹，类似于多回路根轨迹的画法处理，即运用“等效”概念，先画最“内层”的根轨迹(如本题先画以 K 为变量的根轨迹)，再画“外层”的根轨迹(如本题是以 T 为变量的根轨迹)。

例 4.12 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ ，要求系统的闭环极点有一对共轭复极点，其阻尼比为 $\zeta = 0.5$ 。试确定开环增益 K ，并近似分析系统的时域性能。

解 $n=3, m=0$; 根轨迹分离点 $d=-1$
 $+\frac{\sqrt{3}}{3}=-0.42$, 对应 $K=0.192$; 与虚轴的交
 点为 $\pm j\sqrt{2}$, 对应的 $K=3$, 其根轨迹见图
 4-18。

设复极点为 $s_{1,2}=x \pm jy$ 。

根据阻尼比要求,

$$\theta = \arccos \zeta = \arccos 0.5 = 60^\circ$$

$$y = x \tan(180^\circ - \theta) = -1.732x$$

先试凑性地取 $x=-0.3$, 得 $y=0.52$; 此
 时 $\angle G(s) = -173.6^\circ$

不满足相角条件, 因为 $|-173.6^\circ| < |-180^\circ|$, 所以要使 $|x|$ 加大, 使 s 与开环极点形
 成的角度加大。

取 $x=-0.32$, 则 $y=0.554$, 此时 $\angle G(s) = -177.4^\circ$; 继续加大 $|x|$, 取 $x=-0.33$,
 则 $y=0.572$, 此时 $\angle G(s) \approx 180^\circ$ 。因此共轭复极点为 $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.572$, 此时
 $K = \frac{1}{2}K_1 = 0.513$ 。

运用长除法得另一极点为 $s_3 = -2.35$ 。

因 $|s_3| > 0.3 \times 5$, 所以 $s_{1,2}$ 可认为是系统的主导极点。

系统的闭环传递函数可近似地表示为: $\phi(s) = \frac{0.4356}{s^2 + 0.665s + 0.4356}$

可以近似地运用典型二阶系统估算系统的时域性能指标:

$$\text{超调量: } \delta\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$\text{调节时间: } t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 10.6 \text{ s}$$

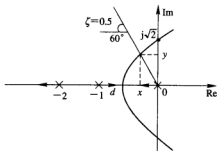


图 4-18

4.7 习 题

4.1 已知系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{2(Ts+1)}{s(s-2)}$, 现要求

- (1) 画出 $0 \leq T < \infty$ 变化的根轨迹。
- (2) 求闭环输出响应无超调时的 T 值范围。
- (3) 求出使闭环不稳定的 T 值范围。

4.2 某三阶二型系统, 它仅有一个开环零点 $s=-1$, 请写出闭环系统三个特征值的实部分别为 $-1, -1, -4$ 时, 相应的以时间常数表示的开环传递函数。

4.3 已知前向通道传递函数 $G(s) = \frac{1}{s^2(s+4)}$, 反馈通道传递函数为 $H(s) = \frac{s+4}{s+2}$,
 试以根轨迹法求此闭环函数的特征根(精确到小数点后第三位)。

4.4 已知 $G(s)H(s) = \frac{K_1(2+s)(1-s)}{s(s^2+4s+8)}$ ，以根轨迹法确定闭环系统稳定的开环增益 K 的取值范围。

4.5 单位反馈控制系统的开环传递函数为 $\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$ ，($z > p_1 > p_2 > 0$)，现要求

(1) 试证明非实轴上根轨迹为一圆。

(2) 试画出 $p_1 = 4$ ， $p_2 = 1$ 及 $z = 5$ 的完全根轨迹，并写出临界阻尼时的闭环传递函数。

4.6 设系统如图 4-19 所示，该系统只有一个不稳定的前向传递函数。试画出系统的根轨迹。

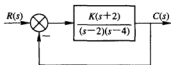


图 4-19

4.7 系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{6}{(s+5)(s-p)}$ ，现要求

(1) 画出 p 值由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时闭环系统的根轨迹。

(2) 画出 p 值由 $0 \rightarrow -\infty$ 变化时闭环系统的根轨迹。

4.8 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_g}{(s+3)^3}$ ，现要求

(1) 画出 K_g 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时的根轨迹。

(2) 用根轨迹法确定使系统具有实部为 -1 的闭环极点时的性能指标 2%， t_s 和 K_p (K_p 为位置误差系数)。

4.9 已知一单位反馈系统的根轨迹如图 4-20 所示。

(1) 写出该系统的闭环传递函数。

(2) 试用适宜的方法，使系统在任意 K 值时均处于稳定状态，并绘出校正后系统的根轨迹图。(提示：增加零点)

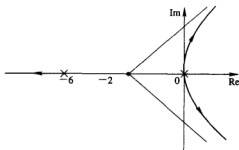


图 4-20

4.10 已知单位负反馈系统开环传递函数为： $G(s) = \frac{K}{(s+1)^2(s+4)^2}$ ，试绘制系统的根轨迹，并求使系统稳定的 K 值范围。

4.11 系统特征多项式为 $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K(s+3) = 0$ ，若要求系统特征根都是负根，试确定 K 的取值范围。

4.12 设某系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s+6)}{(s+2)(s^2+4s+a)}$ ，当 a 分别为 20, 8, 5 时，试绘制其反馈系统的根轨迹。

第5章 控制系统的频域分析法

5.1 本章要求

- (1) 掌握频率特性的基本概念,尤其是频率特性的几种表示方法。
- (2) 能熟练绘制极坐标频率特性曲线(奈魁斯特 Nyquist 曲线)和对数频率特性曲线(伯德 Bode 曲线),尤其要注意的是在非最小的相位系统时曲线的绘制。
- (3) 正确应用频率稳定判别方法,包括奈魁斯特稳定判据和对数稳定判据。
- (4) 熟练正确计算相位裕量和幅值裕量。
- (5) 掌握闭环频率特性的基本知识以及有关指标的近似估算方法。

5.2 基本概念

控制系统频域分析方法是一种图解分析方法。它可以根据系统的开环频域特性来判断闭环系统的性能,其物理意义明确;并且还能较方便地分析系统中的参数对系统性能的影响,从而进一步指出改善系统性能的途径。频率分析法无须像时域分析方法那样去求解高阶微分方程,它已形成一种成熟的工程实用方法,并可推广应用于某些非线性系统的分析。

1. 频域响应

线性系统在正弦输入信号 $r(t) = A \sin \omega t$ 作用下,系统的稳态响应称为系统的频域响应或频率响应。频域响应仍然为正弦函数的形式,其频率与输入频率相同,幅值为输入幅值的 $|G(j\omega)|$ 倍,相位移为 $\varphi(\omega)$ 或 $\angle G(j\omega)$ 。

2. 频率特性

设稳定的线性定常系统,在正弦信号作用下,系统频域响应与输入正弦信号的复数之比称为系统的频域特性。

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

式中, $C(j\omega)$ 为系统频域响应的复数, $R(j\omega)$ 为输入正弦信号的复数。 $|G(j\omega)|$ 称为幅频特性, $\angle G(j\omega)$ 为相频特性。

3. 频率特性与传递函数的关系

设系统的传递函数为 $G(s)$, 则有如下重要的关系:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

这表明频率特性和传递函数一样,频率特性反映了系统的运动规律,加之频率特性可以用图形方式表达,又可通过实验获得,因此为控制系统的分析和设计提供了新的途径。

4. 频率特性的几种表示方法

频率特性是实数频率 ω 的函数,它可以写成复数形式:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (5-1)$$

称 $P(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 为实频特性和虚频特性。频率特性也可表示为向量形式:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega)\angle\varphi(\omega) \quad (5-2)$$

称 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 为幅频特性和相频特性。

5. 频率特性的图解表示法

1) 奈魁斯特(Nyquist)曲线(极坐标频率特性曲线)

它是指在以 $P(\omega)$ 为横坐标,以 $jQ(\omega)$ 为纵坐标的复平面上,当频率 ω 为参变量从0变化到 ∞ 时, $G(j\omega)$ 作为一个矢量,其端点在复平面上相对应的轨迹曲线。

曲线上每一个点和原点的连线所构成的向量的幅值和相位,分别表示对应该点频率的幅频特性和相频特性。向量在实轴和虚轴上的投影就是其相应的实频特性和虚频特性。

2) 伯德(Bode)曲线(对数频率特性曲线)

它包括对数幅频特性和对数相频特性的两条曲线。特性曲线的横坐标是频率轴,用频率的对数值 $\lg(\omega)$ 进行线性刻度;纵坐标是对数幅值或相角。对数幅值和幅值的关系为:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \text{ 其单位为分贝(dB)}$$

3) 尼哥尔斯(Nichols)曲线(对数幅相特性曲线)

它是在直角坐标平面上用一条曲线表示频率从0变化到 ∞ 时,对数幅值和相角之间的关系。

4) 逆奈氏曲线(逆极坐标曲线)

该曲线为系统频率特性的倒数即 $1/G(j\omega)$ 的奈魁斯特曲线。

6. 最小相位系统和非最小相位系统

系统在复平面 S 右半平面上没有零点和极点的传递函数称为最小相位系统;反之,系统在 S 右半平面上有极点和(或)零点的传递函数称为非最小相位系统。

对于最小相位系统,其幅频特性和相频特性之间具有确定的单值对应关系。这就是说,如果系统的幅频特性已定,则相频特性也就惟一确定,反之亦然。然而对于非最小相位系统而言却不存在这种关系。具有相同幅频特性的系统,最小相位系统的相角范围最小。

5.3 典型环节的频率特性

典型环节频率特性的形状及特点是绘制系统开环频率特性的基础。表5.1给出了各种典型环节的幅相曲线和对数频率特性曲线。

1. 典型环节频率特性的对称性

积分环节和微分环节、惯性环节和一阶微分环节、振荡环节和二阶微分环节的对数幅频特性对称于零分贝线;对数相频特性曲线对称于零度线。参见表5.1。

表 5.1 典型环节的频率特性

典型环节	幅相特性曲线	对数幅频、相频渐进特性曲线
(1) 比例环节 K (2) 不稳定比例环节 $-K$ (3) 延迟环节 $e^{-\omega}$		
(1) 积分环节 $\frac{1}{s}$ (2) 微分环节 s		
(1) 惯性环节 $\frac{1}{1+Ts}$ (2) 一阶微分环节 $1+Ts$ (3) 不稳定惯性环节 $\frac{1}{1-Ts}$ (4) 不稳定一阶微分环节 $1-Ts$		
(1) 振荡环节 $\frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$ (2) 二阶微分环节 $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$ (3) 不稳定振荡环节 $\frac{1}{\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1}$ (4) 不稳定二阶微分环节 $\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau s + 1$ ($0 \leq \zeta < 1$)		

不稳定环节中除了 $K < 0$ 外, 各种环节和对应的稳定环节其对数幅频特性曲线相同, 对数相频特性曲线对称于零度线; 其极坐标曲线对称于实轴。

2. 对数幅频渐进特性曲线

为作图简便以及工程需要, 对于典型环节, 常用渐近线来近似对数幅频特性曲线。惯性环节和振荡环节对数幅频渐进特性的绘制方法具有代表性。

$$\text{惯性环节的对数幅频特性可近似表示为: } L(\omega) \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & 0 < \omega < \frac{1}{T} \\ -20 \lg \omega T \text{ dB} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

T^{-1} 称为惯性环节的交接(转折)频率;在 $(0, T^{-1})$ 频率范围内用零分贝线近似;在 $[T^{-1}, +\infty)$ 频率范围内用斜率为 -20 dB/dec , 且过点 $(T^{-1}, 0 \text{ dB})$ 的直线近似。这种近似在交接频率附近有较大的误差。

$$\text{振荡环节的对数幅频特性可近似表示为: } L(\omega) \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & 0 < \omega < \frac{1}{\tau} \\ -40 \lg \omega \tau \text{ dB} & \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

其中, τ^{-1} 称为振荡环节的交接(转折)频率;在 $(0, \tau^{-1})$ 频率范围内用零分贝线近似, 在 $[\tau^{-1}, +\infty)$ 频率范围内用斜率为 -40 dB/dec , 且过点 $(\tau^{-1}, 0 \text{ dB})$ 的直线近似。这种近似在交接频率附近有较大的误差。应当注意, 当 $\xi \leq \sqrt{2}/2$ 时, 幅频特性将会出现谐振峰值 $M_r = 1/(2\xi \sqrt{1-\xi^2})$, 相应的谐振频率为 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$ 。

5.4 开环频率特性的绘制

$$\text{设系统的开环传递函数为: } G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)} \quad (5-3)$$

$$\text{其频率特性为: } G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^m (j\tau_i \omega + 1)}{(j\omega)^v \prod_{j=1}^{n-v} (jT_j \omega + 1)} \quad (5-4)$$

1. 极坐标特性曲线的绘制

将频率特性写成 $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 或 $P(\omega) + jQ(\omega)$ 的形式, 对于若干 ω 值, 分别计算 $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ 或 $A(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$, 在极坐标平面上逐点描图, 然后连成曲线。对于最小相位系统, 利用极坐标特性曲线的某些特征可准确地而快速地画出曲线。这些特征如下:

(1) 曲线的起点 ($\omega \rightarrow 0^+$) 和积分环节的个数有关。

当 $v = 0$ 时, 曲线始于实轴上的 K 点;

$$\text{当 } v \geq 1 \text{ 时, } A(\omega) \rightarrow +\infty, \begin{cases} K > 0 & \varphi(\omega) \rightarrow -v \times \frac{\pi}{2} \pm \epsilon \\ K < 0 & \varphi(\omega) \rightarrow -v \times \frac{\pi}{2} - \pi \pm \epsilon \end{cases}$$

其中 ϵ 为无穷小;此时曲线始于实(虚)轴的无穷远处, 但应注意始于实轴的上方还是下方或虚轴的左方还是右方, 这要取决于 $\varphi(\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+}$ 是 $+\epsilon$ 还是 $-\epsilon$, 它与其它环节时间常数大小有关。见例 5.3。

(2) 曲线的终点 ($\omega \rightarrow +\infty$) 和 m 、 n 值有关。

对于实际系统, 总有 $n \geq m$ 。幅值特征有: 当 $n > m$ 时, $A(\omega) \rightarrow 0$; 当 $n = m$ 时, $A(\omega) \rightarrow |K_g|$ 其中 K_g 为系统开环根轨迹增益。相角特征有: 当 $K > 0$ 时, $\varphi(\omega) \rightarrow -(n-m) \frac{\pi}{2}$;

当 $K < 0$ 时, $\varphi(\omega) \rightarrow -(n-m) \frac{\pi}{2} - \pi$ 。

(3) 曲线与负实轴的交点可由方程求得。

由下式可求出交点对应的频率 ω_k :

$$\varphi(\omega_k) = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

或由 $Q(\omega_k) = 0$ 求得。但后一方程的解中含有与正实轴的交点对应的频率;由交点的频率可求得与负实轴的交点。开环极坐标曲线与负实轴的交点是判定系统闭环稳定的重要依据。

对于无零点的最小相位系统,相角随 ω 增大而单调减小(迟后增大)。若存在零点或是非最小相位系统,相角的变化就比较复杂,极坐标曲线亦会有凹凸。

注意:对于非最小相位系统,仍可按上述三点绘制,但起点和终点的相角没有上述结论,要按具体情况进行分析。

2. 开环对数幅频渐进特性的绘制

将频率特性(或传递函数)写成典型环节相乘的形式,将各典型环节的对数幅频特性、相频特性相加便得到系统的幅频特性和相频特性。绘制对数幅频渐进特性的一般步骤如下:

(1) 将各交接频率按从小到大顺序排列为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$;

(2) ω_1 左边的低频渐进线为一直线,其斜率为 $-20 \times v$ dB/dec,且具有以下特性:

a) 该渐进线通过或其延长线通过 $(1, 20 \lg K)$ 点。

b) 该渐进线或其延长线与零分贝线的交点为 $\omega = |K|^{1/v}$ 。

c) 当 $\omega = \omega_1$ 时, $L(\omega) = 20 \lg(|K|/\omega_1^v)$ 。

(3) 从低频段开始,随着 ω 的增加,每遇到一个交接频率,对数幅频特性渐进线的斜率要发生变化,变化的情况取决于相对应的典型环节的类型。

自 ω_1 开始,如果遇到 $G(s) = (1 + \tau s)^{\pm 1}$ 的环节,在交接频率处斜率改变 ± 20 dB/dec;当遇到 $G(s) = (1 + 2\zeta s + s^2)^{\pm 1}$ 的环节,在交接频率处斜率改变 ± 40 dB/dec。

(4) 必要时可利用误差修正曲线,对交接频率附近的曲线进行修正,以求得更准确的特性。

注意:最小相位系统和非最小相位系统的对数幅频特性相同,但相频特性不同。

5.5 频率域的稳定判据

频率域的稳定判据是频率法的重要理论之一。它不但和劳斯—赫尔维茨判据一样可以判别控制系统的绝对稳定性,而且还可以表示稳定系统的相对稳定程度,以及在需要时可给出如何改进系统稳定性的方法,并可推广应用于某些非线性系统。

1. 奈奎斯特路径(回线)

所谓奈奎斯特路径(简称奈氏回线或路径)是指包围整个右半 s 平面的顺时针方向的封闭曲线,如图 5-1 所示。它由三部分组成:①正虚轴 $s = j\omega$, 频率 ω 由 0^+ 变化到 $+\infty$;②以原点为圆心,半径为无穷大的右半圆, $s = re^{j\theta}$, $r \rightarrow +\infty$, θ 由 $\pi/2$ 变化到 $-\pi/2$;③负虚轴 $s = j\omega$, 频率 ω 由 $-\infty$ 变化到 0^- 。

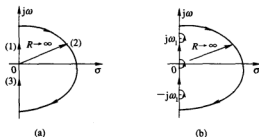


图 5-1

根据映射定理, 奈氏回线不能经过 $G(s)H(s)$ 的零极点。要注意下列三种情况:

第一, 当控制系统无原点的开环极点时, s 由 0^- 变化到 0^+ 的路径聚集为原点 0;

第二, 当控制系统有原点的开环极点时, s 由 0^- 变化到 0^+ 的路径是以原点为圆心, 半径为无穷小的右半圆 $s = re^{j\theta}$, $r \rightarrow \epsilon$, θ 由 $-\pi/2$ 变化到 $\pi/2$, 绕过原点 0, 见图 5-1(b)。

第三, 当控制系统在虚轴上有原点以外的其它开环极点 $s = \pm j\omega_1$ 时, s 由 $j\omega_1^-$ 变化到 $j\omega_1^+$ 的路径, 是以虚轴上 $\pm j\omega_1$ 为圆心, 半径为无穷小的右半圆 $s = re^{j\theta} \pm j\omega_1$, $r \rightarrow \epsilon$, θ 由 $-\pi/2$ 变化到 $\pi/2$, 绕过 ω_1 或 $-\omega_1$ 点。

2. 奈奎斯特轨迹(曲线)

当 s 沿奈氏回线顺时针绕一周时, 在 $[GH]$ 平面上得到的控制系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 的曲线称为奈奎斯特轨迹(曲线)。

由前节可知, 系统的开环幅相曲线就是沿 s 平面上虚轴从频率 ω 由 0^+ 变化到 $+\infty$ 时, 在复平面上 $G(s)H(s)$ 的运动轨迹, 它是奈氏回线①的映射曲线; 根据对称性(关于实轴对称), 即可得 s 沿虚轴从频率 ω 由 $-\infty$ 变化到 0^- 的奈氏回线②的映射曲线。

由于在实际系统中 $n \geq m$, 当 $n > m$ 时奈氏路径③的映射为原点; 当 $n = m$ 时奈氏路径③的映射为实常数, 即奈氏路径③的映射为一个点。

因此, 只要绘制 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 的开环频率特性, 就构成了完整的奈奎斯特轨迹。

根据奈氏回线的三种情况, 相应的映射曲线即奈奎斯特轨迹也分为下面三种情况:

第一, 由于频率 ω 由 0^- 变化到 0^+ 的路径聚集在原点 0, 因此, 奈奎斯特轨迹为奈氏路径①的映射曲线和②的映射曲线构成; 它们关于实轴对称, 形成一条封闭曲线。

第二, 当控制系统有 v 个原点的开环极点时, 频率 ω 由 0^- 通过无穷小的右半圆变化到 0^+ , 而该路径的映射曲线为半径是无穷大的圆弧且圆弧按顺时针方向从 $\pi v/2$ 经过 0 转到 $-\pi v/2$; 该圆弧与奈氏路径①和②的映射曲线构成奈奎斯特轨迹, 它们也关于实轴对称, 形成一封闭曲线。

注意: 对于非最小相位系统, 该路径的映射曲线仍为半径是无穷大的圆弧且圆弧按顺时针方向但从 $\frac{\pi}{2}v + \alpha$ 经过 α 转到 $-\frac{\pi}{2}v + \alpha$ (α 为某一常数)。

第三, 当控制系统在虚轴上有原点以外的其它开环极点 $s = \pm j\omega_1$ 时(设有 v 个), 频率 ω 由 ω_1^- 通过无穷小的右半圆变化到 ω_1^+ , 该路径的映射曲线是半径为无穷大的圆弧且圆弧

按顺时针方向从 $\varphi(\omega_1^-) = \angle G(j\omega_1^-)H(j\omega_1^-) = \lim_{s \rightarrow j\omega_1^-} \angle \{G(s)H(s)(s^2 + \omega_1^2)^v\} + v \times 90^\circ$ 转到 $\varphi(\omega_1^+) = \angle G(j\omega_1^+)H(j\omega_1^+) = \lim_{s \rightarrow j\omega_1^+} \angle \{G(s)H(s)(s^2 + \omega_1^2)^v\} - v \times 90^\circ$ 。同理, 频率 ω 由 $-\omega_1^-$ 通过无穷小的右半圆变化到 $-\omega_1^+$ 时, 其映射曲线为半径是无穷大的圆弧且圆弧按顺时针方向从 $\varphi(-\omega_1^-) = \angle G(-j\omega_1^-)H(-j\omega_1^-)$ 转到 $\varphi(-\omega_1^+) = \angle G(-j\omega_1^+) \cdot H(-j\omega_1^+)$; 这两部分半径为无穷大的圆弧与奈氏路径①和②(除了 $s = \pm j\omega_1$ 点外)的映射曲线构成奈魁斯特轨迹, 它们也关于实轴对称, 形成一封闭曲线。见例 5-7。

3. 奈魁斯特稳定判据

设系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在右半 s 平面上的极点数为 P , 则闭环系统稳定的充要条件为: 当 s 沿奈氏路径绕一圈时, 在 $[GH]$ 平面上的开环奈魁斯特曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$, 按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 P 圈。

如果开环传递函数的全部极点均位于 s 平面的左半部, 即 $P = 0$, 这时闭环系统稳定的充要条件为: 当 s 沿奈氏路径绕一圈时, 在 $[GH]$ 平面上的开环奈魁斯特曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$, 不包围 $(-1, j0)$ 点。

对于不稳定的闭环系统, 其在右半 s 平面上的闭环极点数为 $Z = P - N$, 式中 N 为开环奈魁斯特曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

通常, 只在 $[GH]$ 平面上画出从频率 ω 由 0 变化到 $+\infty$ 时的开环频率特性曲线, 此时开环频率特性曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数是奈魁斯特曲线包围 $(-1, j0)$ 点圈数的一半, 应把确定闭环系统在右半 s 平面上的闭环极点数改为: $Z = P - 2N'$, 式中 N' 为当 ω 由 0 变化到 $+\infty$ 时的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

在运用频域稳定判据时, 应注意以下几点:

(1) 判据中的右半 s 平面指的是右开半平面, 即不包括虚轴。

(2) 若奈魁斯特曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 穿过 $(-1, j0)$ 点时, 则闭环系统存在虚轴上的极点, 计算 N 时不视为一次包围; 此时如果求得 $Z = 0$, 则闭环系统处于临界稳定状态(也是不稳定); 如果求得 $Z > 0$, 则闭环系统处于不稳定状态。

(3) 奈魁斯特曲线同时存在既有逆时针又有顺时针包围 $(-1, j0)$ 点时, 所谓总的逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数是逆时针包围圈数和顺时针包围圈数的代数和。 $N < 0$ 表示顺时针包围 N 圈, $N > 0$ 表示逆时针包围 N 圈。

(4) 逆时针包围和顺时针包围同时存在时, 常给 N 的计算带来困难, 下面给出通过确定开环幅相曲线在 $(-1, j0)$ 点的左侧实轴上的穿越次数而获得 N 的方法。

当奈魁斯特曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数是奇数时, 开环幅相曲线将会产生半次包围(半次穿越) $(-1, j0)$ 的情况。

负穿越——随着 ω 的加大, 开环幅相曲线顺时针穿越 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴, 记为一次负穿越。

正穿越——随着 ω 的加大, 开环幅相曲线逆时针穿越 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴, 记为一次正穿越。

半次穿越——开环幅相曲线起始于(指的是 $\omega \rightarrow 0$ 或 $s \rightarrow \text{Re}^0$, $R \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$, 而不一定是 $\omega \rightarrow 0^+$)或终止于 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴, 若沿逆时针方向离开(或终止于)负实轴, 记为半次正穿越; 若沿顺时针方向离开(或终止于)负实轴, 记为半次负穿越。

若用 N_+ 表示正穿越和半次正穿越的和, 用 N_- 表示负穿越和半次负穿越的和, 则开环幅相曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数为 $N' = N_+ - N_-$ 。

而奈魁斯特曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数为 $2N'$ 。

4. 对数频率稳定判据

利用上述的穿越概念, 用伯德图来确定包围 $(-1, j0)$ 点的情况。在伯德图中, 当对数幅频特性 $L(\omega) > 0$ 时, N_+ 为开环对数相频曲线从下向上穿越 $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 线的次数; N_- 为对数相频曲线从上向下穿越 $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 线的次数。

应用对数频率稳定判据时, 应注意以下几点:

(1) 若开环系统存在 v 个 $s=0$ 的极点, 当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, 对于最小相位系统, 有 $\varphi^+(\omega) \rightarrow -v \times 90^\circ$; 对于非最小相位系统, 有 $\varphi^+(\omega) \rightarrow -v \times 90^\circ + a$ (a 为某一常数)。由于利用伯德图来确定稳定性, 此时应在伯德图上反映出在原点处奈氏路径中半径为无穷小的右半圆上半部; 右半圆上半部为 $s \rightarrow Re^{j\theta}$ ($R \rightarrow 0$), θ 从 $\theta \rightarrow 0^\circ$ 变化到 $\theta \rightarrow 90^\circ$, 相应地要补上该路径所映射的相角变化过程, 即补上从 $\theta \rightarrow 0^\circ$ 的相角 $\varphi^+(\omega) + v \times 90^\circ$ 变化到对于 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 的相角 $\varphi^+(\omega)$ 的虚垂线。

(2) 若开环系统存在 v 个 $s = \pm j\omega_p$ 的极点, 相角在 $\omega = \omega_p$ 处存在间断点, 与上述相同的原理, 在虚轴上 ω_p 点附近的奈氏路径是半径为无穷小的右半圆。右半圆为 $s \rightarrow j\omega_p + Re^{j\theta}$ ($R \rightarrow 0$), 从 $\theta \rightarrow -90^\circ$ 变化到 $\theta \rightarrow 90^\circ$, 相应地要补上该路径所映射的相角变化过程; 即补上从 $\theta \rightarrow -90^\circ$ 的相角 $\varphi^-(\omega) \rightarrow \lim_{r \rightarrow j\omega_p} \angle \{G(s)H(s)(s^2 + \omega_p^2)^v\} + v \times 90^\circ$ 变化到对于 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 的相角 $\varphi^-(\omega) \rightarrow \lim_{r \rightarrow j\omega_p} \angle \{G(s)H(s)(s^2 + \omega_p^2)^v\} - v \times 90^\circ$ 的虚垂线。

(3) 对数频率特性的半次穿越发生在 $L(\omega) > 0$ 时, $\varphi(\omega)$ 起始于或终止于 $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 线。向下离开或终止于 $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 线, 记为半次负穿越; 向上离开或终止于 $(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 线, 记为半次正穿越。

5.6 稳定裕量

在实际分析与设计控制系统时, 常用相对稳定性去衡量闭环系统的稳定程度。相对稳定性包括相角裕量和幅值裕量两方面的概念, 见图 5-2。

1. 相角稳定裕量

在幅频特性上对应于幅值 $A(\omega) = 1$ 的频率称为剪切频率(穿越频率), 以 ω_c 表示。在 $\omega = \omega_c$ 处使系统达到稳定的临界状态所需要的附加的相角迟后量, 称为相角稳定裕量(简称相角裕量), 以 γ 表示。

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

式中 $\varphi(\omega_c)$ 为在 $\omega = \omega_c$ 处的开环相频特性相角。

2. 增益稳定裕量

在相频特性的相角等于 $-\pi$ 时所对应的频率 ω_k 处, 开环幅频特性的倒数 $(1/A(\omega_k))$ 称

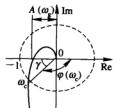


图 5-2

为增益稳定裕量(简称增益裕量),以 K_g 表示。若系统的开环增益增大 K_g 倍,则闭环系统处于稳定的临界状态。

对于一个稳定的最小相位系统,其相角裕量为正,幅值裕量应大于 1。

在系统开环稳定的前提下,相角裕量和幅值裕量越大,系统的稳定程度越高。而一般地,用 $\gamma > 0$ 和 $K_g > 1$ 也不一定表明闭环系统必然稳定。仅用 γ 或 K_g 都不足以说明系统的稳定程度;但在粗略估计系统的暂态响应指标时,有时主要对相角裕量提出要求。见例 5.8。

5.7 系统频域特性与时域响应的关系

1) 频域特性与时域响应的关系

下式表示出系统时域响应和频域特性间的关系。在输入信号一定时,时域响应仅由频率特性决定。

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) R(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

式中: $c(j\omega)$ 为系统输出 $c(t)$ 的傅立叶变换, $R(j\omega)$ 为系统输入 $r(t)$ 的傅立叶变换, $G(j\omega)$ 为系统的频率特性。

开环频率特性的性能指标有前文中提到的稳定裕量即相角稳定裕量 γ 和增益稳定裕量 K_g 。

闭环频率特性的性能指标有如下几种:

① 谐振峰值 M_r —— 系统闭环频率特性幅值的最大值;

② 系统带宽和带宽频率——设 $\varphi(j\omega)$ 为系统的闭环频率特性,当幅频特性 $|\varphi(j\omega)|$ 下降到 $\frac{\sqrt{2}}{2} |\varphi(j0)|$ 时,对应的频率 ω_b 称为带宽频率;频率范围 $\omega \in [0, \omega_b]$ 称为系统带宽。

2) 系统频域指标的计算

典型二阶系统,频域指标可解析计算;高阶系统频域指标一般由频率特性曲线确定,也可近似计算。

1. 典型二阶系统

开环传递函数为: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$ ($\xi > 0$)

闭环传递函数为: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

闭环系统的频率特性为: $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

$$\text{式中 } M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad \alpha(\omega) = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

在 $0 < \xi < 0.707$ 范围内, $M(\omega)$ 于 $\omega = \omega_r$ 处出现峰值 M_r 。

$$\text{截止频率 } \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}$$

$$\text{相角裕量 } \gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}$$

$$\text{谐振频率 } \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (0 < \xi < 0.707)$$

$$\text{谐振峰值 } M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \quad (0 < \xi < 0.707)$$

$$\text{带宽频率 } \omega_b = \omega_n \sqrt{\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4} + (1-2\xi^2)} \quad \text{幅值裕量为无穷大}$$

2. 高阶系统

高阶系统可由图解法近似确定 γ 和 K_s 。若系统存在一对欠阻尼主导极点，也可用典型二阶系统的解析式近似计算。谐振峰值 M_r 的确定，工程上常采用下述经验公式：

$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$

频域指标和时域指标的转换关系如下：

典型二阶系统的计算公式：

$$\sigma\% = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \exp\left[-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}\right] \quad t_s = \frac{3 \sim 4}{\xi\omega_n}$$

高阶系统通常采用经验公式：

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c}, \quad K_0 = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

另外，对于高阶系统，当开环相频特性在 ω_c 附近相角 $\varphi(\omega)$ 变化比较平缓时，有以下近似公式：

$$\omega_r \approx \omega_c \cos \gamma \quad M(\omega_c) \approx 1/2 \sin \frac{\gamma}{2} \quad \omega_b = \omega_c / (\sqrt{\cos^2 \gamma + 1} - \cos \gamma)$$

当 M_r 未知时，可近似取 $t_s = (6 \sim 9) \frac{1}{\omega_c}$ 。

虽然高阶系统不如二阶系统那样简单，但其频域指标与时域指标具有以下一般关系：

- M_r 越大， γ 越小，瞬态过程振荡越强烈，相当于阻尼比小，超调大；
- ω_c 、 ω_b 越大或通频带越宽，系统的过度过程越快；
- 频带越宽或高频增益越大，系统抗高频信号干扰能力越差。

对于具有闭环主导极点的高阶系统，可以用其等效的二阶系统的性能指标计算估计。

5.8 例题讲解

本章重点是正确、灵活地运用频域稳定判据，确定系统的稳定性以及熟练计算系统的三个频域指标即 γ 、 K_s 和 M_r 。在做习题时，需尤为注意以下问题：

(1) 正确绘制奈氏曲线，对于开环传递函数包含有为零的极点时，尤其需注意曲线的起点可能是从轴的上方或下方（左方或右方）出发，它取决于其它零极点的数值，详细见

前文。

(2) 要正确计算出 ω_c 的位置。开环传递函数按典型环节进行分解, 并将交接频率按从小到大的顺序排列为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; 则 $L(\omega_1) = 20 \lg \frac{|K|}{\omega_1^v}$ 。

若 $L(\omega_1) < 0$, 有 $\omega_c < \omega_1$, 则可由 $L(\omega_1) - \gamma \times 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = 0$, 求出 ω_c 。

否则计算 $L(\omega_2) = L(\omega_1) \pm p \times 20 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}$, 其中 p (可为 1 或 2 等) 取决于 ω_2 处斜率的变化。变化量为 20, p 为 1; 变化量为 40, p 为 2; 以此类推。

若 $L(\omega_2) < 0$, 有 $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$, 则可由 $L(\omega_1) \pm p \times 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = 0$, 求出 ω_c 。

否则计算 $L(\omega_3) = L(\omega_2) \pm p \times 20 \lg \frac{\omega_3}{\omega_2}$, 后面过程与前述过程相同。

(3) 注意半次穿越的正确判断。

(4) 需尤为注意的是非最小相位系统的相频特性的正确处理和奈氏曲线的绘制。

例 5.1 已知系统结构如图 5-3 所示, 试根据频率特性的物理意义, 求下列信号输入作用时, 系统的稳态输出 C_{ss} 和稳态误差 e_{ss} 。

(1) $r(t) = \sin 2t$

(2) $r(t) = \sin(t+30^\circ) - 2 \cos(2t-45^\circ)$

解 闭环传递函数为 $\phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s+2}$

闭环频率特性为 $\phi(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$, $|\phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$ 。

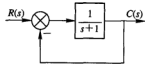


图 5-3

$\phi(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{2}$

误差传递函数为 $\phi_E(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+2}$, $\phi_E(j\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega}$

$|\phi_E(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}}$, $\angle\phi_E(j\omega) = \arctan\omega - \arctan \frac{\omega}{2}$

(1) 当 $r(t) = \sin 2t$ 时, 频率 $\omega = 2$, 输入幅值 $r_0 = 1$, $|\phi(2j)| = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle\phi(2j) = -45^\circ$

则系统的稳态输出为:

$$c_{ss} = r_0 |\phi(2j)| \sin[2t + \angle\phi(2j)] = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2t - 45^\circ)$$

$$|\phi_E(2j)| = \frac{\sqrt{10}}{4}, \angle\phi_E(2j) = \arctan \frac{1}{3}$$

则系统的稳态误差为

$$e_{ss} = r_0 |\phi_E(2j)| \sin[2t + \angle\phi_E(2j)] = \frac{\sqrt{10}}{4} \sin\left(2t + \arctan \frac{1}{3}\right)$$

(2) 当 $r(t) = \sin(t+30^\circ) - 2 \cos(2t-45^\circ)$ 时, $r_1(t) = \sin(t+30^\circ)$, $r_{01} = 1$, $\omega_{01} = 1$, $\theta_1 = 30^\circ$, 则

$$\begin{aligned}
c_{1ss} &= r_{01} | \phi(1j) | \sin[t + \theta_1 + \angle \phi(1j)] \\
&= 1 \times \frac{1}{\sqrt{4+1^2}} \sin\left(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{2}\right) \\
e_{1ss} &= r_{01} | \phi_E(1j) | \sin[t + \theta_1 + \angle \phi_E(1j)] \\
&= 1 \times \frac{\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{4+1^2}} \times \sin\left(t + 30^\circ + \arctan 1 - \arctan \frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{5}} \sin\left(t + 30^\circ + \arctan \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$r_2(t) = -2 \cos(2t - 45^\circ)$, $r_{02} = -2$, $\omega_{02} = 1$, $\theta_2 = -45^\circ$, 则

$$\begin{aligned}
c_{2ss} &= r_{02} | \phi(2j) | \cos[2t - 45^\circ - \angle \phi(2j)] \\
&= -2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(2t - 45^\circ - 45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2t) \\
e_{2ss} &= r_{02} | \phi_E(2j) | \cos[2t - 45^\circ + \angle \phi_E(2j)] \\
&= -2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \cos(2t - 45^\circ + \arctan 2 - \arctan 1) \\
&= -\frac{\sqrt{10}}{2} \cos\left(2t - 45^\circ + \arctan \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

因为 $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$

所以 $c_{ss} = c_{1ss} + c_{2ss} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2t)$

$$e_{ss} = e_{1ss} + e_{2ss} = \frac{\sqrt{10}}{5} \sin\left(t + 30^\circ - \arctan \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{10}}{2} \cos\left(2t - 45^\circ + \arctan \frac{1}{3}\right)$$

讨论: 对于稳定的线性定常系统, 其频率特性为 $G(j\omega) = G(s) |_{s=j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$; 在频率为 ω_0 的正弦输入下, 其输出的稳态分量也是频率为 ω_0 的正弦信号, 但其幅值放大了 $A(\omega_0)$ 倍, 相位平移了 $\varphi(\omega_0)$ 。

例 5.2 系统结构如图 5-4 所示。当输入 $r(t) = 2 \sin t$ 时, 测得输出 $c(t) = 4 \sin(t - 45^\circ)$, 试确定参数 ξ , ω_n 。

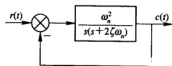


图 5-4

解 系统闭环传递函数为:

$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其频率特性为:

$$\phi(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{幅频: } A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}, \quad A(1) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}}$$

$$\text{相频: } \phi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}, \phi(1) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1}$$

因为 $r(t) = 2 \sin(t)$, 所以 $c(t) = A(1) \cdot 2 \cdot \sin[t + \phi(1)]$

又因为 $c(t) = 4 \sin(t - 45^\circ)$, 所以 $A(1) = 2, \phi(1) = -45^\circ$

$$\text{则有 } \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} = 1, -\arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -45^\circ$$

解得: $\omega_n = 1.244, \xi = 0.22$ 。

例 5.3 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{(Ts+1)}{s^2(s+1)(2s+1)}$, 要求绘制 T 分别为 0, 7/3, 4 时, 系统的奈魁斯特图, 并判断闭环系统的稳定性。

$$\text{解 开环的频率特性为 } G(j\omega)H(j\omega) = \frac{jT\omega+1}{(j\omega)^2(j\omega+1)(j2\omega+1)}$$

$$\text{幅频: } A(\omega) = \frac{\sqrt{T^2\omega^2+1}}{\omega^2 \sqrt{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}}$$

$$\text{相频: } \phi(\omega) = -2 \times 90^\circ - \arctan\omega - \arctan 2\omega + \arctan T\omega$$

$$\text{实频: } X(\omega) = -\frac{1-2\omega^2+3T\omega}{\omega^3(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$\text{虚频: } Y(\omega) = -\frac{(T-3)\omega-2T\omega^3}{\omega^3(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} = -\frac{(T-3)-2T\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

设 ϵ 为正无穷小; 则当 $T > 3$ 时, $\omega \rightarrow 0, Y(\omega) \rightarrow -\epsilon$; 当 $T < 3$ 时, $Y(\omega) \rightarrow +\epsilon$

(1) 当 $T = 0$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ - \arctan\omega - \arctan 2\omega$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}}, \quad X(\omega) = -\frac{1-2\omega^2}{\omega^3(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$Y(\omega) = \frac{3}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

a) 起点 (即 $\omega \rightarrow 0^+$ 时)

因为 $\arctan\omega + \arctan 2\omega \rightarrow$ 正无穷小 ϵ , 所以 $\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ - \epsilon, A(\omega) \rightarrow \infty$, 因此奈氏曲线起于负实轴的上方无穷远处。(同样, 从 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 式可知, 当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $X(\omega) \rightarrow -\infty$ 而 $Y(\omega) \rightarrow +\infty$, 因而奈氏曲线起于负实轴的上方无穷远处)

b) 与实轴交点

因为 $\phi(\omega) = -180^\circ - (\arctan\omega + \arctan 2\omega)$, 故随 ω 增大, $\phi(\omega)$ 越来越迟后, 即 $|\phi(\omega)|$ 随 ω 增大而增大, 不会与实轴有交点 (除 $\omega \rightarrow +\infty$ 的点外)。

(同样从 $Y(\omega)$ 的表达式可知, 仅有 $\omega \rightarrow +\infty$ 时 $Y(\omega) = 0$)

c) 终点 (即 $\omega \rightarrow +\infty$ 时)

$\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ - (90^\circ - \epsilon + 90^\circ - \epsilon) = -360^\circ + 2\epsilon, A(\omega) \rightarrow 0$, 因而奈氏曲线终于坐标原点, 并且从正实轴上方趋于坐标原点。

同样从 $Y(\omega)$ 表达式可知, $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $X(\omega) \rightarrow +\epsilon, Y(\omega) \rightarrow +\epsilon$ 即从正实轴上方趋于坐标原点。

d) $0^- \rightarrow 0^+$ 时即奈氏回线中小圆

因为原系统为最小相位系统, 所以此时奈氏曲线从 $2 \times \pi/2$ 顺时针方向经过 0 转到

$-2 \times \pi/2$ 。

奈氏曲线见图 5-5(a)所示。从图可知,奈氏曲线顺时针方向包围 $(-1, j0)$ 点两圈,由于此系统无开环极点在 s 平面的右半部,故闭环系统是不稳定的,并有两个闭环极点在 s 平面的右半部。

(2) 当 $T = \frac{7}{3}$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ - \arctan\omega - \arctan 2\omega + \arctan \frac{7}{3}\omega$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\omega\right)^2 + 1}}{\omega^2 \sqrt{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}}, \quad X(\omega) = -\frac{1-2\omega^2+7\omega}{\omega^2(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$Y(\omega) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{14}{3}\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

a) 起点(即 $\omega \rightarrow 0^+$ 时)

因为 $\arctan\omega + \arctan 2\omega - \arctan \frac{7}{3}\omega \rightarrow +\epsilon$, 所以 $\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ - \epsilon$, $A(\omega) \rightarrow +\infty$

因此奈氏曲线起于负实轴上方无穷远处(同样,从 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 式可知,当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $X(\omega) \rightarrow -\infty$, $Y(\omega) \rightarrow +\infty$, 因而奈氏曲线起于负实轴上方无穷远处)。

b) 与实轴交点

因为 $\arctan\omega + \arctan 2\omega > \arctan \frac{7}{3}\omega$, 所以随着 $\omega \uparrow$, $\phi(\omega)$ 也增大, 不会出现与负实轴的交点(同样,从 $Y(\omega)$ 式可知, 仅有 $\omega \rightarrow +\infty$ 时才有 $Y(\omega) = 0$)。

c) 终点(即 $\omega \rightarrow +\infty$ 时)

因为 $\arctan\omega + \arctan 2\omega > \arctan \frac{7}{3}\omega$, 所以 $\phi(0^+) \rightarrow -180^\circ - 90^\circ - \epsilon$, $A(\omega) \rightarrow +\infty$

则曲线沿正虚轴的右侧趋于坐标原点。(同样,从 $X(\omega)$ 式可知, $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $X(\omega) \rightarrow +\epsilon$)

d) $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 见本题(1)中 d)。

奈氏曲线如图 5-5(b)所示。从图可知奈氏曲线顺时针方向包围 $(-1, j0)$ 两圈, 由于此系统无开环极点在 s 平面的右半部, 故闭环系统是不稳定的, 有两个闭环极点在 s 平面的右半部。

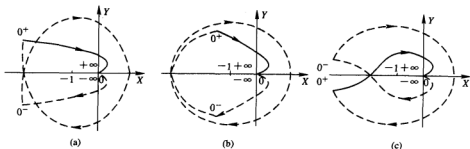


图 5-5

(3) 当 $T = 4$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ - \arctan\omega - \arctan 2\omega + \arctan 4\omega$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{16\omega^2 + 1}}{\omega^2 \sqrt{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}}$$

$$X(\omega) = -\frac{1 - 2\omega^2 + 12\omega}{\omega^2(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}$$

$$Y(\omega) = \frac{8\omega^2 - 1}{\omega(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}$$

a) 起点 (即 $\omega \rightarrow 0^+$ 时)

因为此时 $\arctan 4\omega > \arctan\omega + \arctan 2\omega$, 所以 $\phi(\omega) > -180^\circ + \varepsilon$, $A(\omega) \rightarrow +\infty$

因此, 奈氏曲线起于负实轴的下方无穷远处。(同样, 从 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ 式可知, 当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $X(\omega) \rightarrow +\infty$, 而 $Y(\omega) \rightarrow -\infty$, 即曲线起于负实轴的下方)

b) 与负实轴交点

因为 ω 较小时, $\arctan\omega + \arctan 2\omega < \arctan 4\omega$; ω 较大时, $\arctan\omega + \arctan 2\omega > \arctan 4\omega$, 所以 $\phi(\omega)$ 在 ω 从 0^+ 变化到 $+\infty$ 时, $\phi(\omega)$ 从 $-180^\circ + \varepsilon$ 变化到 $-180^\circ - \theta$ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$), 因此奈氏曲线与负实轴有交点。

令 $Y(\omega) = 0$, 得 $\omega^2 = \frac{1}{8}$ 即 $\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 此时 $X(\omega) < -1$ 。

c) 终点 (即 $\omega \rightarrow +\infty$ 时)

在 ω 较大时, $\arctan\omega + \arctan 2\omega > \arctan 4\omega$

所以 $\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ - 90^\circ - \varepsilon$, $A(\omega) \rightarrow 0$ 因而曲线从正虚轴右侧方向趋于坐标原点。(同样, 从 $X(\omega)$ 式可知, 当 $X(\omega) \rightarrow +\infty$ 时, $X(\omega) \rightarrow +\varepsilon$, 另外, 当 $X(\omega) \rightarrow 0$ 时, 可得一个 ω 为正实数的解 (除 $\omega \rightarrow +\infty$ 外), 因而奈氏曲线是穿过正虚轴然后沿正虚轴趋于原点)

d) $0^- \rightarrow 0^+$, 同前。

奈氏曲线如图 5-5(c) 所示。结论同前。

讨论: 绘制奈氏曲线一般分为四步, 具体见该例。本题为了便于在解题过程中进行比较和说明, 将幅频、相频特性和实频、虚频特性的表达式全部给出, 实际上在解题过程中不需要将四个表达式同时给出。当然全部给出这四个表达式有时说明问题更充分且更便于理解。显然, 本题如上的解题过程过于繁琐, 可以精简。

另外需要强调的是, 关于起点是从负实轴的上方还是下方开始尤为重要, 它常决定系统的稳定性, 见例 5.4。其次, 当与负实轴有交点时, 交点与 $(-1, j0)$ 的关系也常决定系统的稳定性。本题 $T = 4$ 时, 交点在 $(-1, j0)$ 点左侧, 系统不稳定; 否则, 若交点在 $(-1, j0)$ 点右侧, 则系统是稳定的。显然 $T = 4$ 时, 用大于交点处幅值的倒数去乘 $G(s)H(s)$, 使开环增益减小, 则交点变化到 $(-1, j0)$ 点右侧, 那么此时系统是稳定的。另外对于终点, 由于奈氏曲线的终点多为坐标原点, 而原点附近曲线的变化不会影响到系统的稳定性, 因而在分析终点时不需要像本题那样, 分析终点是沿正虚轴右侧趋于原点还是沿左侧趋于原点, 无论何方向都不会影响稳定性, 因而不需详细分析。

总之, 对于起点要分析准确 (即分析清楚起点是从实轴上方还是下方, 或是从左侧还是右侧开始); 对于交点要明确交点与 $(-1, j0)$ 点的关系 (即交点是在其左还是其右); 而对于终点可较粗略地分析 (即仅需分析沿何轴趋于原点, 无需分析是从该轴的上方还是下

方,或者是从左侧还是右侧趋于原点)。

例 5.4 已知控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$, 试讨论其闭环系统的稳定性。

解 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega T_2 + 1)}{-\omega^2(j\omega T_1 + 1)} = A(\omega) \angle \phi(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

$$\text{其中: } A(\omega) = \frac{K \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}{\omega^2 \sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1}}; \phi(\omega) = -180^\circ + \arctan \omega T_2 - \arctan \omega T_1;$$

$$X(\omega) = -\frac{K(1 + \omega^2 T_1 T_2)}{\omega^2(1 + \omega^2 T_1^2)}; Y(\omega) = \frac{K(T_1 - T_2)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}$$

(1) 起点(即 $\omega \rightarrow 0^+$ 时)

$$A(\omega) \rightarrow +\infty, X(\omega) \rightarrow -\infty$$

a) 当 $T_2 > T_1$ 时, $\arctan \omega T_2 > \arctan \omega T_1$, 所以 $\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ + \epsilon$, 即起于负实轴下方无穷远处。(同样, 从 $Y(\omega)$ 式可知, 在 $T_2 > T_1$ 时, $Y(\omega) < 0$, 即起于负实轴下方)

b) 当 $T_2 = T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ$, 即起于负实轴的无穷远处。(同样, 从 $Y(\omega)$ 式可知, 此时 $Y(\omega) = 0$, 即起于负实轴)

c) 当 $T_2 < T_1$ 时, $\arctan \omega T_2 < \arctan \omega T_1$, 所以 $\phi(\omega) \rightarrow -180^\circ - \epsilon$, 即起于负实轴的上方无穷远处。(同样, 从 $Y(\omega)$ 式可知, 此时 $Y(\omega) > 0$, 即起于负实轴的上方无穷远处)

(2) 与负实轴交点

由 $Y(\omega) = 0$ 可知, 除 $\omega \rightarrow +\infty$ 外, 与实轴无交点。

a) $T_2 > T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ + \theta$, ($\theta > 0$), 与负实轴无交点。

b) $T_2 = T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ$, 即与负实轴相重(此时 $Y(\omega) \equiv 0$)。

c) $T_2 < T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ - \theta$, ($\theta > 0$), 与负实轴无交点。

(3) 终点(即 $\omega \rightarrow +\infty$ 时)

$$A(\omega) \rightarrow 0$$

a) $T_2 > T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ + \epsilon$, 即从负实轴下方趋于坐标原点(同样, 此时 $Y(\omega)$ 总为负)。

b) $T_2 = T_1$ 时, 因为此时 $\phi(\omega) = -180^\circ$ (或 $Y(\omega) \equiv 0$), 所以曲线沿负实轴趋于坐标原点。

c) $T_2 < T_1$ 时, $\phi(\omega) = -180^\circ - \epsilon$, 即从负实轴上方趋于坐标原点(同样, 此时 $Y(\omega)$ 总大于零)。

(4) $0^- \rightarrow 0^+$ 时

因为此系统为最小相位系统, 且为 II 型, 所以当 ω 从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 奈氏曲线从 $2 \times \pi/2$ 顺时针转零到 $-2 \times \pi/2$ 。具体奈氏曲线见图 5-6。

因为开环为最小相位系统, 即不存在开环不稳定极点, 所以

当 $T_2 > T_1$ 时, 奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 闭环系统是稳定的, 见图 5-6(a);

当 $T_2 = T_1$ 时, 奈氏曲线刚好穿过 $(-1, j0)$ 点, 闭环系统是临界稳定的, 见图 5-6(b);

当 $T_2 < T_1$ 时, 奈氏曲线顺时针方向包围点 $(-1, j0)$ 两次, 闭环系统不稳定, 见图 5-6(c), 有两个不稳定的闭环极点。

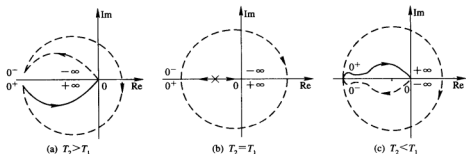


图 5-6

讨论: 下面为对数稳定判据在本题的应用。 $T_2 > T_1$ 和 $T_2 < T_1$ 两种情况响应的伯德图如图 5-7 所示。

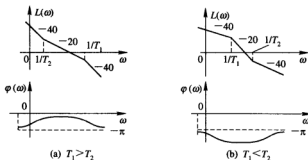


图 5-7

因为开环稳定, 则 $P = 0$ 。

当 $T_2 > T_1$ 时, 从图 5-7(a)可知(注意相频特性中的虚线, 其对应于奈氏曲线中半径为无穷大的圆的一半的情况。也可这样理解, 由于开环系统有两个积分环节, 应在 0^+ 处补上一条从 $\phi(0^+) = -180^\circ + \epsilon$ 到 $[\phi(0^+) + 2 \times 90^\circ] = +\epsilon$ 的虚线), 由于 $\phi(0^+) = -180^\circ + \epsilon$ 在 $-\pi$ 线上方, 所以此时无穿越, 即 $N_+ = N_- = 0$, 所以 $Z = P - 2(N_+ - N_-) = 0$, 即系统闭环稳定。对照奈氏曲线图 5-6(a), 虽然 ω 在 0^+ 时 $\phi(\omega)$ 从 $-180^\circ + \epsilon$ 向下走, 但不存在半次正穿越。

当 $T_2 < T_1$ 时, 从图 5-7(b)可知(注意相频特性中的虚线, 由于开环系统有两个积分环节, 应在 0^+ 处补上一条从 $\phi(0^+) = -180^\circ - \epsilon$ 到 $[\phi(0^+) + 2 \times 90^\circ] = -\epsilon$ 的虚线), 由于 $\phi(0^+) = -180^\circ - \epsilon$ 在 $-\pi$ 线下方, 所以此时有一次负穿越, 即 $N_- = 1, N_+ = 0$, 所以 $Z = P - 2(N_+ - N_-) = 2$, 即系统不稳定, 有两个不稳定闭环极点。对照奈氏曲线图

5-6(c), 虽然 ω 在 0^+ 时 $\phi(\omega)$ 从 $-180^\circ - \epsilon$ 向上走, 但存在一次负穿越, 而不是半次负穿越。

尤为需要强调的是对于半穿越, 必须是当 $\omega \rightarrow 0$ (不是 0^+ 或 0^- , 对于零型系统, $0^+ = 0^- = 0$) 时, $\phi(0) = -\pi + 2k\pi$ (不能加减小无穷小即 $\pm\epsilon$), 才有半次穿越, 当然此时还必须满足 $L(\omega) > 0$, 具体见例 5.5。

例 5.5 已知系统开环传递函数如下, 试用频率方法分析系统的稳定性。

$$(1) G(s) = \frac{K}{Ts-1} \quad (2) G(s) = \frac{0.1s-1}{s(s+1)}$$

解 (1) 系统的开环频率特性为 $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T - 1} = -K \cdot \frac{1+j\omega T}{1+\omega^2 T^2}$

$$A(\omega) = K \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad \phi(\omega) = -\pi + \arctan \omega T$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ 时, } \phi(0) = -\pi, A(0) = k; \omega \rightarrow +\infty \text{ 时, } \phi(\infty) = -\frac{\pi}{2}, A(\infty) = 0$$

ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 时, $\phi(\omega)$ 从 $-\pi$ 增加到 $-\frac{\pi}{2}$, 其奈氏曲线如图 5-8(a) 所示。

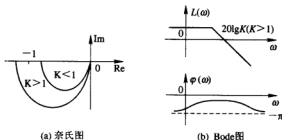


图 5-8

由于开环有一个不稳定极点, 故 $P = 1$ 。

从奈氏图 5-8(a) 可知, $K > 1$ 时, $\omega = 0$, $\phi(\omega) = -\pi$, 此时 $A(\omega) > 1$, 有半次正穿越, 即 $N_+ = \frac{1}{2}$, $N_- = 0$, $Z = P - 2N = 1 - 2 \times (\frac{1}{2} - 0) = 0$, 所以此时系统稳定。同样从伯德图 5-8(b) 也可得知, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $\phi(\omega) \rightarrow -\pi$, 即 $\phi(\omega)$ 趋于 $-\pi$ (没有 $\pm\epsilon$), 所以存在半次正穿越。

当 $K < 1$ 时, $L(\omega) < 0$, 所以不存在半次正穿越, 即 $N_+ = N_- = 0$, $Z = P - 2N = 1$, 所以此时系统闭环不稳定, 有一个不稳定极点。

$$(2) \text{ 系统开环频率特性为 } G(j\omega) = \frac{j0.1\omega - 1}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{1.1\omega^2 + j\omega(1 - 0.1\omega^2)}{\omega^4 + \omega^2}$$

$$X(\omega) = \frac{1.1}{\omega^2 + 1}, \quad Y(\omega) = \frac{1 - 0.1\omega^2}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 + (0.1\omega)^2}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega + (\pi - \arctan 0.1\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \omega - \arctan 0.1\omega$$

当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $A(\omega) \rightarrow +\infty$, $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ (此时 $X(\omega) \rightarrow 1.1$, $Y(\omega) \rightarrow +\infty$)

当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $A(\omega) \rightarrow 0$, $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

要与负实轴有交点, 即 $Y(\omega) = 0$, 有 $1 - 0.1\omega^2 = 0$, 则 $\omega = \sqrt{10}$, 此时 $X(\omega) = 1$, 因而与负实轴无交点。

奈氏回线原点处小半圆从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 相角 $\phi(\omega)$ 从 $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ 顺时针经 π 到 $-\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ 。

说明: 对于小半圆, 令 $s = \epsilon e^{j\theta}$, 代入开环传递函数得 $G(s) |_{s=\epsilon e^{j\theta}} = \frac{0.1\epsilon e^{j\theta} - 1}{\epsilon e^{j\theta}(\epsilon e^{j\theta} + 1)}$; 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $G(s) = \frac{-1}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{\epsilon} e^{j(\pi-\theta)}$, 显然小半圆映射成半径为无穷大的大圆, 当 θ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 经 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 则 $\angle G(\epsilon e^{j\theta})$ 从 $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$ 顺时针经 π 到 $-\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$ 。其奈氏曲线见图 5-9(a)。

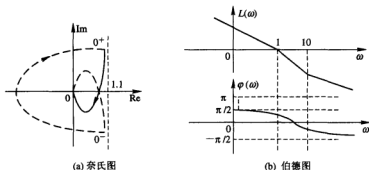


图 5-9

从上可知奈氏回线原点处小半圆从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 相角 $\phi(\omega)$ 从 $3\pi/2$ 经 π 到 $\pi/2$, 此时应在伯德图上补上小半圆从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时 $\phi(\omega)$ 的变化的一半, 即 $\phi(\omega)$ 从 $\pi \rightarrow \pi/2$ 部分, 见图 5-9(b)。同样可解释为, 由于开环系统有一个积分环节, 在伯德图上应在 0^+ 处补上一条从 $\phi(0^+) = \pi/2$ 到 $[\phi(0^+) + 1 \times \pi/2] = \pi$ 的虚线, 见图 5-9(b)。由于该虚线从 π 向下, 所以相当于半次负穿越, 即 $N_+ = 0$, $N_- = 1/2$, 此时 $P = 0$, 所以 $Z = P - 2N = 1$, 即系统存在一个不稳定的闭环极点, 故系统不稳定。

讨论: 用穿越情况来讨论系统的稳定性, 对于开环不包含积分环节的较容易处理, 当开环包含积分环节时, 要注意以下两点:

(1) 关于在奈氏图上看 $(-1, j0)$ 点左侧的穿越情况, 分下列几种:

① 若开环是最小相位系统, 应补上半径为无穷大的圆弧, 其起始位置从正实轴开始顺

时针旋转 $\gamma \cdot \frac{\pi}{2}$ 的角度; 相当于奈氏回线从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 奈氏曲线相角 $\phi(\omega)$ 顺时针从 $\gamma \cdot \frac{\pi}{2}$ 经 0 到 $-\gamma \cdot \frac{\pi}{2}$ 的一半。

② 若开环是非最小相位系统, 也应补上半径为无穷大的圆, 但其开始位置可能是正实轴, 也可能是负实轴, 它取决于开环不稳定零极点 (若增益为负, 该数加 1)。若该数为奇数, 则起于负实轴; 若该数为偶数, 则起于正实轴; 顺时针旋转 $\gamma \cdot \frac{\pi}{2}$ 角, 相当于奈氏回线从 $0^- \rightarrow 0^+$ 时, 奈氏曲线相角 $\phi(\omega)$ 顺时针从 $\gamma \cdot \frac{\pi}{2} \pm \pi(0)$ 经 $\pm \pi(0)$ 到 $-\gamma \cdot \frac{\pi}{2} \pm \pi(0)$ 的一半。

③ 无论是最小相位系统还是非最小相位系统, 无穷大的大圆总是沿顺时针方向的, 大圆相位变化量总为 $-\gamma \cdot \pi$, 一半为 $-\gamma \cdot \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 关于在伯德图上的穿越情况, 不仅看 $-\pi$ 线, 而且要考虑 $-\pi \pm 2k\pi$ 线 (如本例半次负穿越于 $+\pi$), 尤应强调的是, 由于闭环系统包含 γ 个积分环节, 在伯德图上应在 $\omega \rightarrow 0^+$ 处补上一条从 $\phi(0^+)$ 到 $[\phi(0^+) + \gamma \times \pi/2]$ 的曲线, 再来分析穿越情况。

例 5.6 已知系统的开环传递函数如下, 试分析系统的稳定性。

$$(1) G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad (2) G(s) = \frac{-6\left(\frac{1}{3}s+1\right)}{s(-s+1)}$$

$$\text{解} \quad (1) \text{开环频率特性为 } G(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)} = \frac{-4K\omega + jK\omega(3-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}$$

$$X(\omega) = \frac{-4K}{1+\omega^2}, \quad Y(\omega) = \frac{K(3-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)} \quad A(\omega) = \frac{K\sqrt{9+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ + \arctan \frac{\pi}{3} - (\pi - \arctan \omega) = -270^\circ + \arctan \frac{\pi}{3} + \arctan \omega$$

$$a) \text{ 当 } \omega \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \phi(\omega) \rightarrow -270^\circ + \epsilon, A(\omega) \rightarrow +\infty (\text{此时 } X(\omega) \rightarrow -4K, Y(\omega) \rightarrow +\infty)$$

$$b) \text{ 当 } \omega \rightarrow +\infty \text{ 时, } \phi(\omega) \rightarrow -270^\circ + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \epsilon = -90^\circ - \epsilon, A(\omega) \rightarrow 0 (\text{此时 } X(\omega) \rightarrow -\epsilon, Y(\omega) \rightarrow -\epsilon)$$

c) 当 ω 从 $0^+ \rightarrow +\infty$ 时, $G(j\omega)$ 从第二象限到第三象限, 一定穿越负实轴; 与实轴的交点可以由 $\phi(\omega) = -\pi$ 求出, 也可以由 $Y(\omega) = 0$ 求出。如同 $Y(\omega) = 0$, 可得 $3 - \omega^2 = 0$, 即 $\omega = \sqrt{3}$, 此时 $A(\omega) = K$, $X(\omega) = -K$ 。

d) 小半圆从 $0^- \rightarrow 0^+$, 由于系统为非最小相位系统, 且开环包含一个积分环节, 所以 $\phi(\omega)$ 顺时针从 $\frac{\pi}{2} \times 1 - \pi = -\frac{\pi}{2}$ 经 $-\pi$ 到 $-\frac{\pi}{2} \times 1 - \pi = -\frac{3\pi}{2}$, 其奈氏曲线见图 5-10。

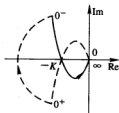


图 5-10

结论: 因开环有一个不稳定极点即 $P=1$, 当 $K < 1$ 时, 奈氏图顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一次, 即 $N=-1$, 所以 $Z=P-N=2$, 即闭环系统有两个不稳定的极点; 当 $K > 1$ 时, 奈氏图逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一次, 即 $N=1$, 所以 $Z=P-N=0$, 即闭环系统

稳定。

讨论：为了便于与对数稳定判据比较，图 5-11 给出本例的对数相频特性曲线，图中纵的点划线左侧为 $L(\omega) > 0$ 。

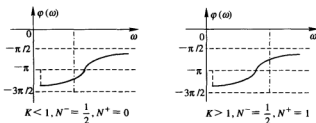


图 5-11

(2) 系统开环函数特性

$$G(j\omega) = \frac{-6(1+j\omega/3)}{j\omega(1-j\omega)}, \quad A(\omega) = \frac{6\sqrt{1+\omega^2/9}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\pi + \arctan \frac{\omega}{3} - \frac{\pi}{2} - (-\arctan \omega) = -\frac{3\pi}{2} + \arctan \frac{\omega}{3} + \arctan \omega$$

$\phi(\omega)$ 的表达式与(1)中的 $\phi(\omega)$ 相同，实际上 $G(s) = \frac{-6(\frac{1}{3}s+1)}{s(-s+1)} = -\frac{2(s+3)}{s(1-s)}$ ，该式即为题(1)中 $K=2$ 的情况，其它内容同题(1)，这里略。

讨论：(2)的目的主要是帮助读者掌握如何根据 $G(j\omega)$ 的表达式，直接写出 $\phi(\omega)$ 的表达式。注意 $\phi(\omega)$ 中的每一项与 $G(j\omega)$ 中的典型环节相对应。

例 5.7 系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{s+2}{s(s^2+1)}$ ，试绘制其奈奎斯特图，并判别其稳定性。

解 从 $G(s)H(s)$ 可知有两个极点在虚轴上(除原点外)，所以其奈氏回线在该两极点处应用半径为无穷小的右半圆绕过，以满足映射定理。图 5-12(a)为奈氏回线。

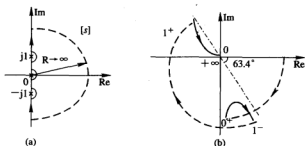


图 5-12

$$\text{系统开环频率特性为 } G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega(1 - \omega^2)} = \frac{\omega - j2}{\omega(1 - \omega^2)}, A(\omega) = \frac{\sqrt{4 + \omega^2}}{\omega |1 - \omega^2|}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega}{2} & |\omega| < 1 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega}{2} - \pi & |\omega| > 1 \end{cases} \quad X(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2}, Y(\omega) = \frac{-2}{\omega(1 - \omega^2)}$$

当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $A(\omega) \rightarrow +\infty$, $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \epsilon$ (此时 $X(\omega) \rightarrow 1$, $Y(\omega) \rightarrow -\infty$)

当 $\omega \rightarrow 1^-$ 时, $A(\omega) \rightarrow +\infty$, $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} = -63.4^\circ$

当 $\omega \rightarrow 1^+$ 时, $A(\omega) \rightarrow +\infty$, $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} - \pi = -243.4^\circ$

当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $A(\omega) \rightarrow 0$, $\phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \epsilon - \pi = -\pi - \epsilon$

当 s 对应于虚轴上点 $(0, j1)$ 右边的小半圆所映射的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的轨迹时, 说明如下, 其中 δ 为正无穷小, θ 为从 $-\frac{\pi}{2}$ 经 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} G(s)H(s) \big|_{s=j+\delta e^{j\theta}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{j + \delta e^{j\theta} + 2}{(j + \delta e^{j\theta})[(j + \delta e^{j\theta})^2 + 1]} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 + j}{-2\delta e^{j\theta}} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5}}{2\delta} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2})} = \text{Re}^{j\theta_1} \end{aligned}$$

当 $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 即 $\omega \rightarrow 1^-$ 时, $R \rightarrow +\infty$, $\phi_1 \rightarrow -\pi + \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} = -63.4^\circ$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $R \rightarrow +\infty$, $\phi_1 \rightarrow -\pi + 0 + \arctan \frac{1}{2} = -153.6^\circ$

当 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 即 $\omega \rightarrow 1^+$ 时, $R \rightarrow +\infty$, $\phi_1 \rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2} = -243.4^\circ$, 所以奈氏回线中点 $(0, j1)$ 右边的小半圆所映射的 $G(s)H(s)$ 轨迹为半径为无穷大的圆, 相角顺时针从 -63.4° 经 -153.6° 到 -243.4° , 见图 5-12(b)。

在奈氏回线中, 点 $(0, j1)$ 右边的小半圆所映射的 $G(s)H(s)$ 的轨迹与点 $(0, -j1)$ 右边的小半圆所映射的 $G(s)H(s)$ 的轨迹关于实轴对称。

对应于原点右边小半圆所映射的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的轨迹为半径是无穷大的圆, 相角顺时针从 $\pi/2$ 经 0 到 $-\pi/2$, 见图 5-12(b)中虚线, 图中仅画一半。从图 5-12(b)可知, 奈氏曲线有一次负穿越, 即 $N^- = 1$, $N^+ = 0$ 所以 $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 2$, 则闭环系统是不稳定的, 且有两个不稳定极点。

例 5.8 已知单位反馈系统其开环传递函数如下, 试绘制其伯德图并判断其稳定性。

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.25s + 1)(0.0625s + 1)} \cdot \frac{0.2s^2}{0.8s + 1}$$

$$(2) G(s) = \frac{5(1 - 0.5s)}{s(1 + 0.1s)(1 - 0.2s)}$$

$$(3) G(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 25)(0.2s + 1)}$$

$$\text{解 } (1) G(j\omega) = \frac{20(j\omega)^2}{(0.25j\omega + 1)(0.0625j\omega + 1)(0.8j\omega + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{20\omega^2}{\sqrt{(0.25\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{(0.0625\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{(0.8\omega)^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan 0.25\omega - \arctan 0.0625\omega - \arctan 0.8\omega$$

转折频率从小到大依次为 $\frac{1}{0.8} = \frac{5}{4}$, $\frac{1}{0.25} = 4$, $\frac{1}{0.0625} = 16$

在 $\omega < 5/4$ 段, $L(\omega)$ 是斜率为 $+2 \times 20$ dB/dec 的直线, 且该线经过 $(1, 20 \lg K)$ 点即 $(1, 20 \lg 20)$ 点;

在 $5/4 < \omega < 4$ 段, $L(\omega)$ 斜率发生了 -20 dB/dec 的变化, 即该段直线斜率为 2×20 dB/dec $- 20$ dB/dec $= 20$ dB/dec;

在 $4 < \omega < 16$ 段, $L(\omega)$ 斜率也发生了 -20 dB/dec 的变化, 即该段直线斜率为 20 dB/dec $- 20$ dB/dec $= 0$;

在 $\omega > 16$ 段, 该段直线斜率为 $0 - 20$ dB/dec $= -20$ dB/dec;

相角 $\varphi(\omega)$ 从 $+\pi$ 逐渐减小变化到 $-\pi/2$ 。伯德图如图 5-13 所示, 其中相频特性仅画出大致的趋势。

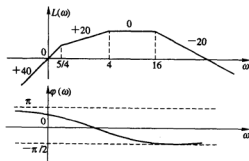


图 5-13

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |A(\omega)| \approx 20 \lg |20\omega^2| & \omega < \frac{5}{4} \quad \text{注近似式用 } 0.8\omega \ll 1 \text{ 得到} \\ 20 \lg |A(\omega)| \approx 20 \lg \left| \frac{20\omega^2}{0.8\omega} \right| & \frac{5}{4} < \omega < 4 \quad \text{注近似式用 } 0.8\omega \gg 1 \text{ 且 } 0.25\omega \ll 1 \text{ 得到} \\ 20 \lg |A(\omega)| \approx 20 \lg \left| \frac{20\omega^2}{0.25\omega \cdot 0.8\omega} \right| & 4 < \omega < 16 \quad \text{注近似式用 } 0.25\omega \gg 1 \text{ 且 } 0.0625\omega \ll 1 \text{ 得到} \\ 20 \lg |A(\omega)| \approx 20 \lg \left| \frac{20\omega^2}{0.25\omega \cdot 0.8\omega \cdot 0.0625\omega} \right| & \omega > 16 \quad \text{注近似式用 } 0.0625\omega \gg 1 \text{ 得到} \end{cases}$$

从伯德图可知当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $\varphi(\omega) \rightarrow 180^\circ$; 但此时 $L(\omega) < 0$, 所以不存在穿越, 即 $N^+ = N^- = 0$, 且 $P = 0$, 故系统是稳定的。

下面也可用稳定裕量来说明系统的稳定性:

从 $L(\omega)$ 表达式可知仅在 $\omega < \frac{5}{4}$ 和 $\omega > 16$ 时, 渐近线穿过 0 dB 线。

$$\text{令 } 20 \lg \frac{20\omega^2}{0.25\omega + 0.8\omega + 0.0625\omega} = 1 \quad \text{得 } \omega_{c2} = 1600$$

$$\text{令 } 20 \lg \frac{20\omega^2}{0.25\omega + 0.8\omega + 0.0625\omega} = 1 \quad \text{得 } \omega_{c1} = 0.22$$

对于(幅值)穿越频率 $\omega_{c1} = 0.22 \text{ s}^{-1}$, 得相位裕量为 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) > 0$;

对于 $\omega_{c2} = 1600 \text{ s}^{-1}$, 得相位裕量为 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{c2}) > 0$;

对于(相位)穿越频率 $\omega_g \rightarrow 0$, 此时 $L(\omega) \rightarrow +\infty$, 所以幅值裕量 $K_g \rightarrow +\infty$ 。

综合 $\gamma > 0$ 和 $K_g > 0$, 得系统是稳定的。

$$(2) \quad G(j\omega) = \frac{5(1 - j0.5\omega)}{j\omega(0.1j\omega + 1)(-0.2j\omega + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{5\sqrt{1 + (0.5\omega)^2}}{\omega\sqrt{[(0.1\omega)^2 + 1]}[(0.2\omega)^2 + 1]}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.5\omega - \arctan 0.1\omega + \arctan 0.2\omega$$

转折频率从小到大的顺序为: $\frac{1}{0.5} = 2, \frac{1}{0.2} = 5, \frac{1}{0.1} = 10$

当 $\omega < 2$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -20 dB/dec 的直线, 且该线过 $(1, 20 \lg 5)$ 点;

当 $2 < \omega < 5$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 $-20 \text{ dB/dec} + 20 \text{ dB/dec} = 0$ 的直线;

当 $5 < \omega < 10$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 $0 \text{ dB/dec} - 20 \text{ dB/dec} = -20 \text{ dB/dec}$ 的直线;

当 $\omega > 10$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 $-20 \text{ dB/dec} - 20 \text{ dB/dec} = -40 \text{ dB/dec}$ 的直线;

相位 $\varphi(\omega)$ 从 $-\pi/2$ 逐渐减小变化到 $-\pi$ 。伯德图如图 5-14 所示, 其中相频特性为大致的趋势。

从伯德图 5-14 可见无穿越, 即 $N^- = 0, N^+ = 0$, 而 $P = 1$, 所以 $Z = P - 2N = P - 2(N^+ - N^-) = 1$, 因而闭环系统不稳定, 有一个不稳定极点。

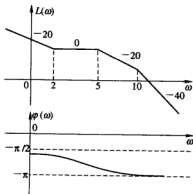


图 5-14

下面用稳定裕量来说明稳定性:

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg \frac{5}{\omega} & \omega < 2 \\ 20 \lg \frac{5 \times 0.5\omega}{\omega} & 2 < \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{5 \times 0.5\omega}{\omega \times 0.2\omega} & 5 < \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{5 \times 0.5\omega}{\omega \times 0.1\omega \times 0.2\omega} & \omega > 10 \end{cases}$$

只有 $\omega > 10$ 时, $L(\omega)$ 穿过 0 dB 线, 则令 $L(\omega) = 0 (\omega > 10)$, 得(幅值)穿越频率 $\omega_c = 11.2 \text{ s}^{-1}$

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c + \arctan 0.2\omega_c \\ &= 90^\circ - 79.9^\circ - 48.2^\circ + 65.9^\circ = 28^\circ > 0 \end{aligned}$$

从对数相频特性可知, 当 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $\phi(\omega) \rightarrow -\pi$, 得(幅值)穿越频率 $\omega_s \rightarrow +\infty$; 则幅值量 $K_s \rightarrow -L(\omega) \rightarrow +\infty > 0$.

对于非最小相位系统, 虽然 $\gamma > 0$, $K_s > 0$, 但这不足说明系统是稳定的, 因此本题仅从 $\gamma > 0$ 和 $K_s > 0$ 仍不能确定系统的稳定性。

$$(3) G(j\omega) = \frac{1000}{j\omega(25 - \omega^2)(0.2j\omega + 1)} = \frac{40}{j\omega(1 - 0.04\omega^2)(1 + 0.2j\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{40}{\omega |1 - 0.04\omega^2| \sqrt{1 + (0.2\omega)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -90^\circ - \arctan 0.2\omega & 1 - 0.04\omega^2 < 0 \text{ 即 } \omega < 5 \\ -90^\circ - 180^\circ - \arctan 0.2\omega & \omega > 5 \end{cases}$$

转折频率为 5, 即当 $\omega < 5$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -20 dB/dec 且过点 $(1, 20 \lg 40)$ 的直线;

当 $\omega > 5$ 时, $L(\omega)$ 的斜率为 $-20 - 2 \times 20 = -80 \text{ dB/dec}$;

ω 从 $0 \rightarrow 5^+$ 时, $\phi(\omega)$ 从 -90° 变化到 -180° ;

ω 从 $5^+ \rightarrow +\infty$ 时, $\phi(\omega)$ 从 -270° 变化到 -360° ;

ω 从 $5^- \rightarrow 5^+$ 时, $\phi(\omega)$ 从 -180° 跃变到 -270° 。

伯德图如图 5-15 所示, 其中相频特性仅画出大致趋势。

从图 5-15 可知, 有一次负穿越, 即 $N^- = 1$, $N^+ = 0$, $P = 0$ 。

所以 $Z = P - 2(N^+ - N^-) = 2$, 即在右半平面有两个闭环极点, 系统不稳定。

下面用稳定裕量方法进行判别:

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg \frac{40}{\omega} & \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{40}{\omega \times (0.2\omega^2)} & \omega > 5 \end{cases}$$

$\omega > 5$ 时 $L(\omega)$ 穿过 0 dB 线, 所以令 $L(\omega) = 0 (\omega > 5)$, 得幅值穿越频率 $\omega = 8.4 \text{ s}^{-1}$

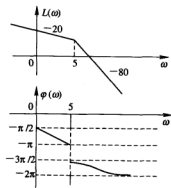


图 5-15

$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 180^\circ - \arctan \omega_c < 0$, 所以系统不稳定。

讨论: (1) 对于非最小相位系统, 不能仅仅用相位裕量 $\gamma > 0$ 和幅值裕量 $K_g > 0$ 确定系统的稳定性。

(2) $L(\omega)$ 常用渐近线表示。在用渐近线表示 $L(\omega)$ 时, $L(\omega)$ 具有如下近似式:

$$\text{设系统开环传递函数为: } G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\gamma \prod_{i=1}^{n-\gamma} (T_i s + 1)}$$

其中 $|T_i| > |T_{i+1}|$, $|\tau_i| > |\tau_{i+1}|$ 。

其特性频率为:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j j\omega + 1)}{(j\omega)^\gamma \prod_{i=1}^{n-\gamma} (T_i j\omega + 1)} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad A(\omega) = \frac{K \sqrt{\prod_{j=1}^m [1 + (\tau_j \omega)^2]}}{\omega^\gamma \sqrt{\prod_{i=1}^{n-\gamma} [1 + (T_i \omega)^2]}}$$

对应的转折频率为: $\omega_{T_i} = \frac{1}{|T_i|}$, $\omega_{\tau_j} = \frac{1}{|\tau_j|}$, 则有 $\omega_{T_i} < \omega_{T_{i+1}}$, $\omega_{\tau_j} < \omega_{\tau_{j+1}}$

将 ω_{T_i} 和 ω_{τ_j} 按从小到大顺序依次排列为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+\gamma}$, 且 $\omega_i < \omega < \omega_{i+1}$, 可近似认为 $\omega/\omega_{i+1} \ll 1$, $\omega/\omega_i \gg 1$; 对于小于 ω_i 的 ω_{T_i} 和 ω_{τ_j} , 不妨设 $i = 1, 2, \dots, n_1$; $j = 1, 2, \dots, m_1$, 有 $\omega/\omega_{T_i} \gg 1$, $\omega/\omega_{\tau_j} \gg 1$; 对于大于 ω_{i+1} 的 ω_{T_i} 和 ω_{τ_j} , 不妨设 $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n - \gamma$; $j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$ 。

由 $\omega/\omega_{T_i} \ll 1$, $\omega/\omega_{\tau_j} \ll 1$, 则对 $\omega_i < \omega < \omega_{i+1}$ 频率, 此时有:

$$A(\omega) = \frac{K \sqrt{\prod_{j=1}^m [1 + (\tau_j \omega)^2]}}{\omega^\gamma \sqrt{\prod_{i=1}^{n-\gamma} [1 + (T_i \omega)^2]}} \approx \frac{K \sqrt{\prod_{j=1}^m [(\tau_j \omega)^2]}}{\omega^\gamma \sqrt{\prod_{i=1}^{n-\gamma} [(T_i \omega)^2]}}$$

所以

$$L(\omega) \approx 20 \lg \frac{K \prod_{j=1}^{m_1} |\tau_j \omega|}{\omega^\gamma \prod_{i=1}^{n_1} |T_i \omega|}$$

例 5.9 设系统开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(s + \omega_2)}{s(s + \omega_1)(s + \omega_3)(s + \omega_4)}$, 式 $\omega_1 < \omega_2$

$< \omega_3 < \omega_4$, $K = \omega_4 \omega_c^2$, ω_c 为开环对数幅频特性的幅值穿越频率, 试绘制系统的开环对数幅频特性曲线。

$$\text{解 } G(s)H(s) = \frac{K(s + \omega_2)}{s(s + \omega_1)(s + \omega_3)(s + \omega_4)} = \frac{\frac{K\omega_2}{\omega_1 \omega_3 \omega_4} \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_3} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_4} + 1\right)}$$

因为 $K = \omega_4 \omega_c^2$, 则开环增量 $K_1 = \frac{K\omega_2}{\omega_1 \omega_3 \omega_4} = \frac{\omega_c^2 \omega_2}{\omega_1 \omega_3}$

又因为 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$, 所以当 $\omega < \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -20 dB/dec 的直线, 且

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega};$$

当 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -40 dB/dec 的直线, 且 $L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega}$;

当 $\omega_2 < \omega < \omega_3$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -20 dB/dec 的直线, 且 $L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1 \frac{1}{\omega_2} \cdot \omega}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega}$;

当 $\omega_3 < \omega < \omega_4$ 时, $L(\omega)$ 是斜率为 -40 dB/dec 的直线, 且

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1 \frac{1}{\omega_2} \cdot \omega}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega_3} \cdot \omega}$$

当 $\omega > \omega_4$ 时, $L(\omega)$ 为斜率为 -60 dB/dec 的直线, 且

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1 \frac{1}{\omega_2} \cdot \omega}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega_3} \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega_4} \cdot \omega}$$

若 $\omega_c < \omega_1$, 则 $\frac{K_1}{\omega} = 1$, 即 $K_1 = \omega_c$, 这与题中已知矛盾。

若 $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$, 则 $\frac{K_1}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega} = 1$ 即 $K_1 = \frac{\omega_c^2}{\omega_1}$, 这也与题中已知矛盾。

若 $\omega_2 < \omega_c < \omega_3$, 则 $\frac{K_1 \frac{1}{\omega_2} \cdot \omega}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega} = 1$, 即 $K_1 = \frac{\omega_c \omega_2}{\omega_1}$, 这仍与题中已知矛盾。

若 $\omega_3 < \omega_c < \omega_4$, 则 $\frac{K_1 \frac{1}{\omega_2} \cdot \omega}{\omega \cdot \frac{1}{\omega_1} \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega_3} \cdot \omega} = 1$, 即 $K_1 = \frac{\omega_c^2 \omega_2}{\omega_1 \omega_3}$, 与题中已知相符。

所以 $\omega_3 < \omega_c < \omega_4$, 故开环对数幅频特性曲线见图 5-16。

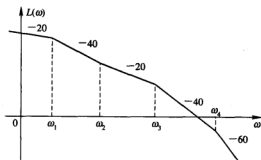


图 5-16

讨论：本题已知 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ ，也就已知了上图每处折线的斜率，仅 0 dB 线与哪段折线相交未定，根据已知条件 $K = \omega_4 \omega_c^2$ ，可确定 0 dB 线与 ω_3 到 ω_4 段折线相交，即 ω_c 处于 ω_3 和 ω_4 点之间。 ω_c 所处的折线段，对系统的特性有决定性意义，因此在画伯德图时，要将 ω_c 所处的位置正确地（在哪段折线内）绘制。

例 5.10 设系统开环幅相频率特性如图 5-17 所示，试判别闭环系统的稳定性。（图中， r 为位于原点的开环极点数， n 为位于右半 s 平面的开环极点数。）

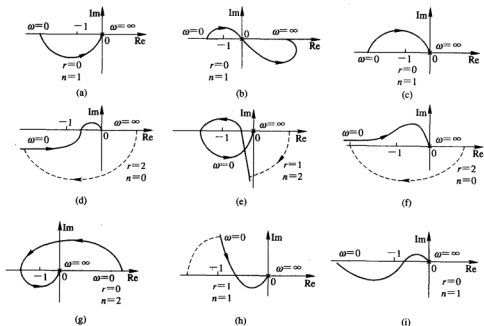


图 5-17

解 (a) 从图 5-17(a) 可见 $\omega \rightarrow 0$ 时奈氏曲线起于负实轴且向下，因此存在半次正穿越，即 $N^+ = 1/2, N^- = 0$ ；所以不稳定的极点数： $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 1 - 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$ ，故系统稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0 的部分，即原图关于实轴对称的部分，见图 5-18(a) 中虚线。由图可见奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈，即 $N = 1$ ；所以 $Z = n - N = 1 - 1 = 0$ 。

(b) 从图 5-17(b) 可见 $\omega \rightarrow 0$ 时奈氏曲线起于负实轴并向上，因此存在半次负穿越，即 $N^+ = 0, N^- = 1/2$ ；所以不稳定的极点数： $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 1 - 2\left(0 - \frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$ ，则系统不稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0 的部分，即原图关于实轴对称的部分，见图 5-18(b)。由图可见奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈，即 $N = -1$ ；所以 $Z = n - N = 1 + 1 = 2$ 。

(c) 从图 5-17(c) 可见 $\omega \rightarrow 0$ 时奈氏曲线起于负实轴并向上, 因此存在半次负穿越, 即 $N^+ = 0$, $N^- = 1/2$; 所以不稳定的极点数为: $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 1 - 2(0 - \frac{1}{2}) = 2 \neq 0$, 则系统不稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0 的部分, 即原图关于实轴对称的部分, 见图 5-18(c)。由图可见奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈, 即 $N = -1$; 所以 $Z = n - N = 1 + 1 = 2$ 。

(d) 由于 $r \neq 0$, 因此首先补上 ω 从 0 到 0^+ 的部分; 又因 $n = 0$, 所以该部分起于正实轴, 见图 5-17(d) 中虚线。从图 5-17(d) 可见不存在超越, 即 $N^+ = N^- = 0$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 0 - 2(0 - 0) = 0$, 则系统不稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0^- 再到 0 的部分, 即原图 5-17(d) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(d)。由图可见奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 即 $N = 0$; 所以 $Z = n - N = 0 + 0 = 0$ 。

(e) 由于 $r \neq 0$, 因此首先补上 ω 从 0 到 0^+ 的部分; 又因 $n = 2$ (说明: 偶数), 所以该部分起于正实轴, 见图 5-17(e) 中虚线。从图 5-17(e) 可见存在一次正超越, 即 $N^+ = 1$, $N^- = 0$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 2 - 2(1 - 0) = 0$; 则系统稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0^- 再到 0 的部分, 即原图 5-17(e) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(e)。由图可见奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点两圈, 即 $N = 2$; 所以 $Z = n - N = 2 - 2 = 0$; 注意: 从 0^- 到 0^+ 总是顺时针的, 相角变化量为 $r \cdot \pi$ 。

(f) 由于 $r \neq 0$, 因此首先补上 ω 从 0 到 0^+ 的部分; 又因 $n = 0$ (说明: 偶数), 所以该部分起于正实轴, 见图 5-17(f) 中虚线。从图 5-17(f) 可见存在一次负超越, 即 $N^+ = 0$, $N^- = 1$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 0 - 2(0 - 1) = 2$, 则系统不稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0^- 再到 0 的部分, 即原图 5-17(f) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(f)。由图可见奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点两圈, 即 $N = -2$; 所以 $Z = n - N = 0 - (-2) = 2$ 。注意: 从 0^- 到 0^+ 总是顺时针的, 相角变化量为 $r \cdot \pi$ 。

(g) 从图 5-17(g) 可见存在一次正超越, 即 $N^+ = 1$, $N^- = 0$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 2 - 2(1 - 0) = 0$, 则系统稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0 的部分, 即原图 5-17(g) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(g)。由图可见奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点两圈, 即 $N = 2$, 所以 $Z = n - N = 2 - 2 = 0$ 。

(h) 由于 $r \neq 0$, 因此首先补上 ω 从 0 到 0^+ 的部分; 又因 $n = 1$ (说明: 奇数), 所以该部分起于负实轴, 见图 5-17(h) 中虚线。从图 5-17(h) 可见存在半次负超越, 即 $N^+ = 0$, $N^- = 1/2$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 1 - 2(0 - 1/2) = 2$, 则系统不稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0^- 再到 0 的部分, 即原图 5-17(h) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(h)。由图可见奈氏曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈, 即 $N = -1$, 所以 $Z = n - N = 1 - (-1) = 2$ 。注意: 从 0^- 到 0^+ 总是顺时针的, 相角变化量为 $r \cdot \pi$ 。

(i) 从图 5-17(i) 可见存在半次正超越, 即 $N^+ = 1/2$, $N^- = 0$, 所以不稳定的极点数为 $Z = n - N = n - 2(N^+ - N^-) = 1 - 2(1/2 - 0) = 0$, 则系统稳定。

或补充上 ω 从 $-\infty$ 到 0 的部分, 即原图 5-17(i) 关于实轴对称的部分, 见图 5-18(i)。由图可见奈氏曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈, 即 $N = 1$, 所以 $Z = n - N = 1 - 1 = 0$ 。

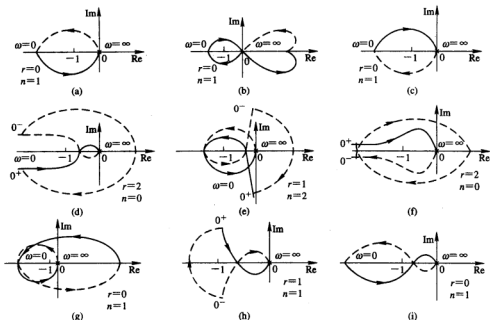


图 5-18

例 5.11 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

(1) 确定 $\gamma = 60^\circ$ 的 K 值;

(2) 确定单位斜坡输入时 $e_{ss} = 0.1$ 的 K 值。

解 (1) 系统相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega - \arctan 0.1\omega, \quad \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

根据题中给出已知条件 $\gamma = 60^\circ$, 令 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 60^\circ$

$$\text{得 } \arctan \frac{0.6\omega_c}{1-0.05\omega_c^2} = 30^\circ, \quad \omega_c = 0.92 \text{ s}^{-1}$$

开环转折频率依次为 2 s^{-1} 和 10 s^{-1} ,

$$\text{当 } \omega < 2 \text{ 时, } L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega}$$

因为 $\omega_c < 2$, 所以根据 $L(\omega_c) = 1$ 有 $20 \lg \frac{K}{\omega_c} = 1$, 解得 $K = \omega_c = 0.92$ 。

系统开环对数幅频特性的渐近线如图 5-19 所示；当 $K = 0.92$ 时，满足 $\gamma = 60^\circ$ 的要求。

(2) 系统为 I 型系统，则 $K_v = K$ ，由

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} = 1$$

得 $K = 10$ 。

由

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{K}{\omega} & \omega < 2 \\ 20 \lg \frac{K}{\omega \cdot 0.5\omega} & 2 < \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{K}{\omega \cdot 0.5\omega \cdot 0.1\omega} & \omega > 10 \end{cases}$$

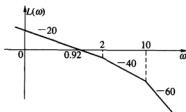


图 5-19

可知 $L(2) > 0$ ， $L(10) < 0$ ，即 $2 < \omega < 10$ 段折线穿越 0 dB 线。

$$\text{令 } L(\omega) = 20 \lg \frac{10}{0.5\omega^2} = 1, \text{ 得 } \omega_c = 2\sqrt{5} \text{ s}^{-1}$$

相应的 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c = 0^\circ$ ，故系统不稳定；此时稳态误差无任何意义。

讨论：从上述计算结果可见，当 $K = 0.92$ 时， $\gamma = 60^\circ$ ； $K = 10$ 时， $\gamma = 0^\circ$ 。随着 K 值增大， γ 值减小；虽然随着 K 值的增大，系统的稳态误差减小，但系统的稳定裕量也逐渐减小，甚至出现系统不稳定。本例表明，根据稳态误差对开环增益所提出的要求和根据相角裕量所提出的要求是相互矛盾的，这是反馈控制系统中普遍存在的问题。

例 5.12 对于高阶系统，若要求时域指标为 $\delta\% = 18\%$ ， $t_s = 0.05 \text{ s}$ ，试将其转换成频域指标。

解 对于高阶系统分成两种情况讨论：

(1) 当该高阶系统闭环存在一对主导极点时，或其开环频率特性与典型二阶系统的对数幅频频率特性较接近时（即 ω_c 附近折线斜率为 -20 dB/dec ；中频段下一折线斜率为 -40 dB/dec ，且该折线的下一转折点远离 ω_c ；中频段前一折线转折点也远离 ω_c ），见图 5-20，也就是 $\omega_1 \ll \omega_c$ ， $\omega_3 \gg \omega_c$ ，可将该高阶系统近似看成二阶系统。

$$\text{由 } \delta\% \approx e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 18\% \text{ 得 } \zeta = 0.48,$$

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{1+4\zeta^4-2\zeta^2}} = 50.2^\circ$$

$$\text{由 } \omega_c t_s \approx \frac{7}{\tan \gamma} \text{ 得 } \omega_c = \frac{7}{t_s \tan \gamma} = 116.5,$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

所求频域指标为 $M_r = 1.19$ ， $\omega_c = 116.5$ ， $\gamma = 50.2^\circ$ 。

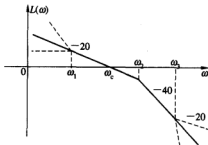


图 5-20

(2) 当高阶系统不能近似为二阶系统时，可根据经验公式计算：

$$\delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \quad (1 \leq M_r \leq 1.8) \quad (0.2 \leq \delta \leq 0.56)$$

$$t_s = \frac{K_o \pi}{\omega_c}, M_r = \begin{cases} \delta + 1 & \delta \leq 0.25 \\ 4\delta^2 + 1 & 0.25 < \delta < 1 \end{cases}$$

$$K_o = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, 1 \leq M_r \leq 1.8$$

由 $\delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$ 得 $M_r = \frac{1}{0.4}(\delta\% - 0.16) + 1 = 1.05$ (该式与条件 $0.2 \leq \delta \leq 0.56$) 不符, 故该经验式不合适)

$$\text{由 } M_r = \delta + 1 \text{ 得 } M_r = 1.18$$

$$\text{由 } K_o = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 2.35 \text{ 得 } \omega_c = \frac{K_o \pi}{t_s} = 147.7 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{由 } M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma} \text{ 得 } \gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = 58^\circ$$

$$\text{此时 } M_r = 1.18, \omega_c = 147.7 \text{ s}^{-1}, \gamma = 58^\circ$$

讨论: 对于高阶系统的闭环频率特性近似计算可分为两种情况: 当高阶系统能近似为二阶系统时, 可直接用二阶系统的闭环精确公式近似计算高阶系统的闭环频率指标; 当高阶系统不能近似为二阶系统时, 只能用经验公式去近似计算。

例 5.13 某最小相位系统开环对数幅频特性如图 5-21 所示, 已知 ω_c 位于两个转折频率的几何中心, 试计算系统的稳态精度、超调量和调整时间。

解 由图 5-21 可知, 系统的开环传递函

$$\text{数为 } G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.2s+1)}$$

因为 ω_c 位于转折频率 1 s^{-1} 和 5 s^{-1} 的几何中心, 则 $\omega_c = \sqrt{1 \times 5} = 2.236 \text{ s}^{-1}$

$$\text{由 } 20 \lg \frac{\omega_c}{1} = 20 \lg K \text{ 得 } K = \omega_c = \sqrt{5}; \text{ 或由}$$

$$1 < \omega < 5 \text{ 时 } L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega} = 0 \text{ 得 } K = \omega_c。$$

从低频的渐近线的斜率可知系统为 II 型。

则位置误差系数为 $K_p = \infty$, 速度误差系

数为 $K_v = \infty$, 加速度误差系数为 $K_a = K = 2.236$, 系统对加速度输入时的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0.447$ 。

又因为转折频率 1 s^{-1} 与 $\omega_c = 2.236 \text{ s}^{-1}$ 较近, 故不能将该系统近似看成二阶系统去估算时域指标, 只能用经验公式。(实际上 $K = 2.236$ 时闭环极点为 $-1.38 \pm j1.76$ 和 -2.24 , 不存在主导极点。)

$$\text{系统的相角裕量为 } \gamma = \arctan \omega_c - \arctan 0.2\omega_c = 41.81^\circ;$$

$$\text{闭环谐振峰值为 } M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.5;$$

$$\text{超调量 } \delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 36\%,$$

$$K_o = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 3.37;$$

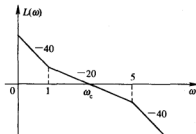


图 5-21

系统的调节时间为 $t_s = \frac{K_o \pi}{\omega_c} = 4.739 \text{ s}$ 。

例 5.14 已知系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(0.5s+1)(0.02s+1)}$ ，试计算系统的过渡过程时间 t_s 和超调量。

解 开环系统的伯德图如图 5-22 所示。

转折频率依次为

$$\omega_1 = \frac{1}{0.05} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ s}^{-1}$$

由

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{10}{\omega} & \omega < 20 \\ 20 \lg \frac{10}{\omega \cdot 0.05\omega} & 20 < \omega < 50 \\ 20 \lg \frac{10}{\omega \cdot 0.05\omega \cdot 0.02\omega} & \omega > 50 \end{cases}$$

得 $\omega_c = 10 \text{ s}^{-1}$ 。

因为 $\omega_2 \gg \omega_c$ ，所以可近似地将该系统看成二阶系统；因而可直接用二阶系统的精确公式来计算该高阶系统的时域指标（实际上此时闭环极点为 -55.16 和 $-7.41 \pm j11.3$ ，即存在一对主导极点）。

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.02\omega_c = -127.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 52.1^\circ, \quad \zeta \approx \frac{0.75(\gamma - 5)}{65} = 0.54$$

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\sqrt{4\zeta^2 + 1 - 2\zeta^2}} = 13.2 \text{ s}^{-1}, \quad \delta = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 13.5\%, \quad t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 0.49 \text{ s}$$

例 5.15 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{Ke^{-s}}{s/2+1}$ ，试用奈氏稳定判据确定使系统闭环稳定的增益 K 值的范围。

解 开环频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega}}{j\omega/2+1} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan 0.5\omega - \omega, \quad A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2/4}}$$

由于幅值 $A(\omega)$ 随着 ω 增加而减小，令 $\varphi(\omega) = -\pi$ 可求得最小穿越频率 $\omega_c = 2.29 \text{ s}^{-1}$ ，其它解 ω_i 所对应的 $A(\omega_i)$ 要小于 $A(\omega_c)$ ；若 $A(\omega_c) = 1$ ，则其它解与负实轴交点的幅值 $A(\omega_i) < 1$ 。

$$\text{令 } A(\omega_c) = 1 \quad \text{得 } K = \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{4}} = 1.52$$

由于 $K = 1.52$ 时其幅相曲线在频率为 ω_c 时穿过 $(-1, j0)$ 点，而其它与负实轴的交点 $A(\omega_i) < 1$ ，不会出现包围点 $(-1, j0)$ 的情况，所以此时系统处于临界状态。

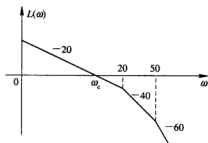


图 5-22

当 $K < 1.52$ 时, 幅相曲线所有与负实轴交点的幅值 $A(\omega) < 1$, 不包围点 $(-1, j0)$, 此时系统稳定。

当 $K > 1.52$ 时, 幅相曲线至少包围 $(-1, j0)$ 点一次, 此时系统不稳定。

所以系统稳定的范围为 $K < 1.52$ 。

例 5.16 图 5-23 中画出三个最小相位系统的近似对数幅频特性 1、2、3, 试写出其对应的传递函数。

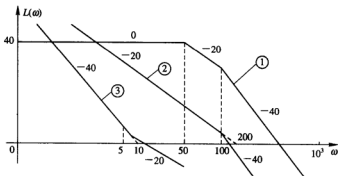


图 5-23

解 对于最小相位系统, 可由对数幅频特性惟一地确定其相应的传递函数。

(1) 对于曲线①, 转折频率依次为 $\omega_1 = 50$, $\omega_2 = 100$ 。

$\omega < \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 为 0 dB/dec 的直线, 说明系统为 0 型系统;

$\omega_1 < \omega < \omega_2$ 时, $L(\omega)$ 为 -20 dB/dec 的直线, 斜率变化了 -20 dB/dec, 说明有一惯性环节, 其时间常数为 $1/\omega_1$;

$\omega > \omega_2$ 时, $L(\omega)$ 为 -40 dB/dec 的直线, 斜率变化了 -20 dB/dec, 说明同上, 其时间常数为 $1/\omega_2$ 。

故

$$G(s) = \frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

又因 $\omega < \omega_1$ 的 $L(\omega)$ 折线经过 $(1, 20 \lg K)$ 点, 所以 $20 \lg K = 40$, $K = 100$ 。故

$$G(s) = \frac{100}{\left(\frac{1}{50}s + 1\right)\left(\frac{1}{100}s + 1\right)}$$

(2) 对于曲线②, 转折频率为 $\omega_1 = 100$ 。

$\omega < \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 为 -20 dB/dec 的直线, 即包含一个积分环节, 说明系统为 I 型系统;

$\omega > \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 为 -40 dB/dec 的直线, 斜率变化了 -20 dB/dec, 说明系统包含一个惯性环节。

因为 $\omega < \omega_1$ 时折线与 0 dB 线的交点为 200, 所以 $K=200$, 故,

$$G(s) = \frac{200}{s\left(\frac{1}{100}s + 1\right)}$$

(3) 对于曲线③, 转折频率为 $\omega_1 = 5$ 。

$\omega < \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 为 -40 dB/dec 的直线, 即包含两个积分环节, 说明系统为 II 型系统;
 $\omega > \omega_1$ 时, $L(\omega)$ 为 -20 dB/dec 的直线, 斜率变化了 $+20 \text{ dB/dec}$, 即有一个比例微分环节, 其时间常数为 $1/\omega_1$ 。

因为 $\omega < \omega_1$ 时折线的延长线与 0 dB 线的交点为 10 , 而该折线斜率为 $-20 \times 2 \text{ dB/dec}$, 所以 $K=10^2$, 故

$$G(s) = \frac{100(1+0.2s)}{s^2}$$

5.9 习 题

5.1 系统如图 5-24 所示, $K > 0$ 且输入 $r(t) = A \cos 3t$ 时, 从示波器中观测到输入、输出的幅值相等, 相位差 90° 。① 确定参数 K, a ; ② 若输入 $r(t) = 3 \cos \omega t$, 确定 ω 为何值时, 稳定输出 $c(t)$ 的幅值最大, 并求出此最大幅值。

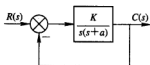


图 5-24

5.2 已知系统如图 5-25 所示, 试以奈氏判据判别闭环系统的稳定性。

5.3 已知系统如图 5-26 所示, $G_1(s) = s+2$, $G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)+K}$, 试用奈氏判据确定使系统稳定的 K 值。

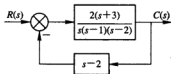


图 5-25

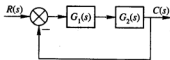


图 5-26

5.4 已知反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$, 试绘制开环幅相曲线, 并判断系统稳定性。若不稳定, 请指出右半 S 平面的极点个数。

5.5 绘制下列系统的幅相特性曲线。

① $G(s) = \frac{10}{(s-1)(5s+1)}$

② $G(s) = \frac{10}{s(s-1)(5s+1)}$

③ $G(s) = \frac{10}{s^2(s-1)(5s+1)}$

$$④ \quad G(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(5s+1)}$$

$$⑤ \quad G(s) = \frac{10(1-s)}{s(5s+1)}$$

$$⑥ \quad G(s) = \frac{10(1-s)}{s(s+1)(5s+1)}$$

$$⑦ \quad G(s) = \frac{10}{s(s-1)(1-2s)(5s+1)}$$

$$⑧ \quad G(s) = \frac{10(1-2s)}{s(s-1)(5s+1)}$$

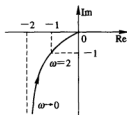


图 5-27

5.6 系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)e^{-\tau s}$ ，二阶环节 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹如图 5-27 所示，试求使系统稳定的 τ 的取值范围。

5.7 控制系统的结构如图 5-28(a) 所示，其中 $G_2(s)$ 的频率特性如图 5-28(b) 所示 ($T > 0, \tau > 0$)，试画出该系统的幅相曲线，并用奈氏稳定判据分析其稳定性。

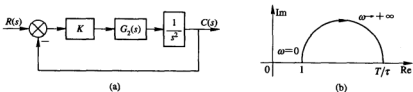


图 5-28

5.8 已知系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+10)}{s^2(s-1)}$,

- ① 大致画出系统奈氏曲线图；
- ② 用奈氏判据判断系统稳定性。

5.9 单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+1.5)(s+2)}$ ，希望系统闭环极点都具有小于 -1 的实部，试用奈氏判据确定增益的最大值。

5.10 已知开环传递函数 $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)^2}$ ，要求用奈氏判据求系统临界开环增益，并分析当某一惯性环节的时间常数变为 $a(a > 0)$ 时，其开环增益的变化。

5.11 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(0.1s+1)}{s(s-1)(10s+1)}$,

- ① 试绘制 $K=1$ 时的对数幅频、相频特性的渐近线；
- ② 应用奈氏判据分析系统的稳定性，并说明改变 K 值是否可以改变系统的稳定性。

5.12 已知系统开环传递函数在平面 S 右半平面的极点数为零，且为 I 型系统，系统开环增益 $K=100$ 时的对数幅频特性图如图 5-29 所示，试确定闭环系统稳定的 K 值范围。

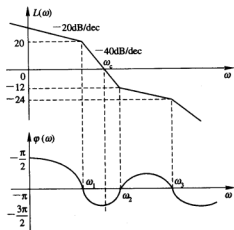


图 5-29

5.13 某系统开环对数幅频、相频特性如图 5-30 所示,若开环系统在 S 平面右半部的极点数为 2,试用穿越情况判别闭环系统的稳定性。

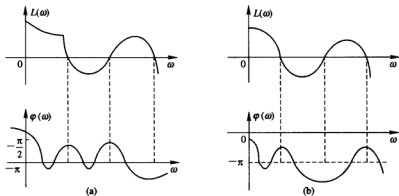


图 5-30

5.14 系统的奈氏曲线如图 5-31 所示,本系统为 II 型系统,在右半平面 S 的开环极点数为零。求不在左半平面 S 的闭环极点数。

5.15 ① 某一最小相位系统开环奈氏曲线如图 5-32 所示。

② 一个 I 型 n 阶系统的开环奈氏曲线也如图 5-32 所示,该开环传递函数零点数为 $(n-2)$ 且在左半平面内。

试分别判断①及②两系统稳定的 K 值范围,并指出在不稳定 K 值范围内时,不在左半 S 平面内的闭环极点数(需利用奈氏判据说明理由)。

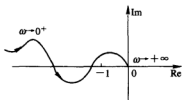


图 5-31

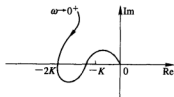


图 5-32

5.16 系统结构如图 5-33 所示, $G(s) = \frac{10}{s^2(2s+1)}$ 。

- ① 绘制 $\tau = 0$ 时的开环幅相曲线, 并用奈氏判据判断系统的稳定性。
- ② $\tau > 0$ 时, 若使截止频率 ω_c 为 4, 问能否满足相角度 $\gamma \geq 20$ 的要求?
- ③ 讨论参数 τ 对系统稳定性的影响。

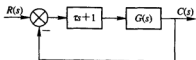


图 5-33

5.17 某单位反馈系统的前向通道的传递函数为

$$G(s) = \frac{2s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 8s + 2}{s^6 + 5s^5 + 10s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s}$$

- ① 求系统的开环增益;
- ② $G(s)$ 是否是最小相位系统?
- ③ 闭环系统是否稳定?
- ④ 求系统的开环对数幅频特性的高频段 $\omega \rightarrow +\infty$ 的渐近线的斜率及相频特性自 $\omega \rightarrow 0$ 至 $\omega \rightarrow +\infty$ 的相角变化量。

5.18 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s(Ts - 1) \prod_{j=1}^n (\tau_j s + 1)}$$

其中除了一个位于原点和一个位于正实轴的极点外, 其余开环零点极点均位于负实轴上。当开环放大系数为 $K = 1$ 时, 系统的开环对数频率特性曲线 $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 如图 5-34 所示。讨论欲使闭环系统稳定的开环放大系数 K 的取值范围 ($K > 0$)。

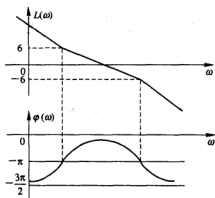


图 5-34

5.19 已知系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)} \quad (T_1 > T_2 > 0)$$

试求 K 变化下系统相角裕度 γ 的最大值。

5.20 已知单位反馈系统如图 5-35 所示, 求

① 满足谐振峰值 $M_p = 1.01$, 谐振频率 $\omega_p = 11.55 \text{ rad/s}$ 的 K 和 a 值;

② 在由①确定的 K 和 a 值条件下, 求系统对单位阶跃函数的响应调节时间 t_s 和频率宽度 ω_b 。

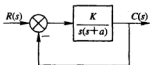


图 5-35

第6章 线性系统的校正

6.1 本章要求

- (1) 熟悉三种基本校正网络的频率特性, 以及时域指标和频域指标之间的近似换算。
- (2) 掌握期望频率特性对高、中、低三段的要求和特点。
- (3) 重点掌握和能熟练运用三种串联校正的设计方法与基本步骤; 在正确理解三种串联校正网络在系统中的作用的基础上, 会灵活运用校正方法。
- (4) 掌握反馈校正和复合校正的一般方法。

6.2 基本概念

为某种用途而设计的每个控制系统都必须满足一定的性能指标。系统性能指标的确定是很重要的第一步。性能指标应从生产实际出发, 应遵循既满足要求又不要过高的原则。本章涉及到选取或确定校正装置的数学模型。

1. 系统的固有部分与校正装置

系统中被控对象和保证被控对象正常工作的部分, 是为了实现某种用途而必须具有的部分, 称为系统的固有部分或不可变部分。

当系统性能指标不满足设计要求时, 需在系统中引入附加装置用来校正系统的性能, 使其全面满足性能指标要求。这些为校正系统性能而有目的地引入的装置称为校正装置。

2. 性能指标

在控制系统设计中, 所选用的设计方法一般依据性能指标的形式而定。如果性能指标以频率特征量——谐振峰值 M_r , 谐振频率 ω_r , 带宽频率 ω_b , 穿越(截止)频率 ω_c , 相角裕量 γ , 幅值裕量 k_g , 稳态误差 e_{ss} 等给出时, 一般采用频率校正法; 如果性能指标以时域特征量——超调量 $\sigma\%$, 调节时间 t_s , 上升时间 t_r , 自然频率 ω_n , 阻尼比 ζ 和稳态误差 e_{ss} 等给出时, 一般采用根轨迹校正法。目前工程上习惯采用频率方法, 故有时需通过近似公式进行两种指标的互换。有关近似换算公式见第5章。

3. 理想的频率特性

系统开环频率特性与系统时域指标之间有一定的关系。一般有相位裕量越大, 系统的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 越小, 即近似反比关系; 穿越频率 ω_c (或 ω_r 、 ω_b) 与调节时间 t_s 、谐振峰值 M_r 与阻尼比 ζ 也近似成反比关系; 而相位裕量 γ 与阻尼比 ζ 近似成正比关系。因此, 理想频率特性应有较大的相位裕量, 希望响应速度快的系统就应有大一点的穿越频率 ω_c 。

通常将理想的频率特性分成三段考虑:

在低频段(通常指 $\omega \ll \omega_c$), 应该有积分环节且开环增益较大, 以满足稳态误差的要求。在中频段(通常指 ω_c 附近, $+15 \sim -10$ dB 的频率范围), 应以 -20 dB/dec 的斜率穿越 0 dB 线, 并占有足够宽的频带, 以保证系统具有较大的相位裕量。在高频段(通常指 $\omega \gg \omega_c$), 频率特性应该尽快衰减, 以减小噪声的影响。

另外, 要注意的是系统带宽应大于系统的输入信号带宽 $5 \sim 10$ 倍。

4. 校正方式

按照校正装置在系统中的连接方式, 控制系统中的校正方式通常分为串联校正、反馈校正、复合校正和前馈校正四种, 见图 6-1~图 6-3。

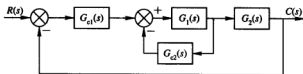


图 6-1 串联校正和反馈校正

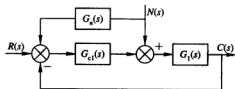


图 6-2 复合校正

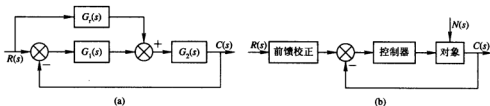


图 6-3 前馈校正

5. 基本控制规律 PID

1) 比例 P 控制 $G_c(s) = k_p$

比例控制的增强, 可提高系统的响应速度和稳态精度, 但会降低系统的相对稳定性。P 作用不能兼顾稳态和暂态两方面的要求。

2) 比例微分 PD 控制 $G_c(s) = k_p + k_d s$

比例微分作用使系统增加了一个开环零点, 使控制作用具有“预见”性, 减小系统超调, 增大阻尼。适当的 PD 作用可兼顾稳态和暂态两方面的要求。

3) 比例积分 PI 控制 $G_c(s) = k_p + k_d s + k_i/s$

比例积分作用使系统增加了一个开环零点和一个位于坐标原点的开环极点,使系统的稳态误差得到本质改善。积分作用不能单独使用,否则可能造成系统不稳定。比例系数 k_p 值的选取不再依据系统稳态误差的要求,而是选取配合适当的 k_p 与 k_i ,使系统开环具有一个所需要的零点,以得到所需要的暂态响应。一般情况,PI 作用只允许暂态响应有小的甚至没有超调,这也意味着系统响应速度不能过快。PI 作用不能兼顾稳态和暂态两方面的要求。

4) 比例积分微分 PID 控制 $G_c(s) = k_p + k_d s + k_i/s$

PID 作用除了增加一个位于坐标原点的开环极点外,还提供两个负实零点。与 PI 相比,PID 控制除了同样具有提高系统的稳态性能的优点外,还多提供了一个负实零点,从而在提高系统动态性能方面,具有更大的优越性。PID 控制器广泛应用于工业控制系统中。

6. 校正装置

1) 超前校正装置

这种装置其传递函数为:

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad (a > 1)$$

最大超前相角及频率为 $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$, $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$, 频率特性见图 6-4, 其中 ω_m 为最大

超前角对应的频率,位于超前网络频率特性的两个转折频率 $1/aT$ 和 $1/T$ 的几何中心, φ_m 为最大超前相角。其主要特点是在所有频率下,相角特性均为正值即相角超前,在 $1/aT$ 和 $1/T$ 频段斜率为 $+20$ dB/dec。超前校正就是利用正相移和正斜率改善中频段的相位和斜率,增大系统的频带和稳定裕量,提高系统的快速性,改善平稳性。这种校正适用于稳态精度已满足要求但动态性能较差的系统。但它对高频的抗干扰能力较差,对提高稳态精度作用不大。

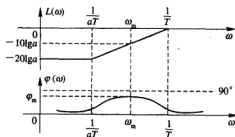


图 6-4 超前校正装置的频率特性

2) 滞后校正装置

这种装置其传递函数为:

$$G_c(s) = b \frac{Ts + 1}{Ts + 1} \quad (b < 1)$$

最大迟后相角及频率为 $\varphi_m = \arcsin \frac{b-1}{b+1}$, $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ 频率特性见图 6-5, 其中 ω_m 为最大

迟后角对应的频率, 位于迟后网络频率特性的两个转折频率 $1/T$ 和 $1/bT$ 的几何中心, φ_m 为最大迟后相角。其主要特点是在所有频率下, 相角特性均为负值即相角迟后, 在 $1/T$ 和 $1/bT$ 频段斜率为 -20 dB/dec 。迟后校正就是利用幅值下移 $20 \lg b$, 使已校正系统的截止频率下降, 从而使系统获得足够的相位裕量; 同样由于幅值的下移使得有可能提高开环增益, 使稳态精度提高。这种校正适用于稳态精度要求较高或平稳性要求严格的系统。但系统频带变窄, 快速性降低。

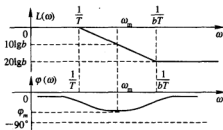


图 6-5 迟后校正装置的频率特性

3) 迟后—超前校正装置

这种校正其传递函数为:

$$G_c(s) = \frac{T_a s + 1}{a T_a s + 1} \cdot \frac{T_b s + 1}{\frac{T_b}{a} s + 1} \quad (a > 1, T_a > T_b)$$

其频率特性见图 6-6, 其中 ω_1 为零相角的频率, 且 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_a T_b}}$ 。其主要特点是兼有迟后

校正和超前校正的特点。将迟后作用设置在低频段, 利用迟后部分的幅值衰减特性提高系统的稳态精度; 将超前作用设置在中频段, 利用超前部分的相角超前特性提高系统的动态性能, 以确保迟后校正和超前校正的优点得到充分发挥, 从而全面提高系统的动态和稳态性能。

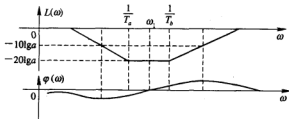


图 6-6 迟后—超前校正装置的频率特性

6.3 串联校正

本章的重点内容是在掌握三种基本校正环节特性的基础上,会灵活运用其特性,使串联校正后的系统特性满足要求。下面总结的校正方法不是一成不变的,要针对所校正系统性能要求的不同,灵活应用下面的校正方法。

1. 串联超前校正

超前校正就是利用超前网络的相位超前特性,提高校正后的系统穿越频率 ω''_c ,并使校正后系统穿越频率 ω''_c 恰好落在超前网络最大超前相角的频率 ω_m 处,即 $\omega_m = \omega''_c$ (或在其附近),利用最大超前相角使校正后系统的相位裕量得到提高。具体过程如下:

(1) 根据稳态误差要求,确定开环增益 K ;绘制在 K 值已确定时的对数幅频特性图。

(2) 求出未校正系统的穿越频率 ω'_c 和相位裕量 γ' 。

(3) 根据期望的相位裕量 γ_0 ,估算出所需的最大超前相角 φ_m , φ_m 不应过大,计算公式为:

$$\varphi_m = \gamma_0 - \gamma' + \epsilon$$

式中 ϵ 取 $5^\circ \sim 20^\circ$,为校正后穿越频率的提高(即 $\omega''_c > \omega'_c$)而留出的裕量。

(4) 由 φ_m 可求出网络系数 a 。网络在 ω_m (此时未知)处的增益 $10 \lg a$ 应等于未校正系统的增益 $-L'(\omega'_c)$,校正后的增益 $L''(\omega''_c) = 0$,即 ω''_c 为校正后系统的穿越频率,由此可求出 ω''_c ($\omega_m = \omega''_c$),具体公式如下:

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \rightarrow -L'(\omega'_c) = 10 \lg a \rightarrow \omega_m = \omega''_c \rightarrow T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$$

(5) 校验已校正系统的相位裕量和幅值裕量以及其它性能指标。如不符合要求,可增大 ϵ ,并从第3步重新计算,直到满足全部指标。

上述过程可简单描述为: $K \rightarrow \varphi_m \rightarrow a \rightarrow \omega_m(\omega''_c) \rightarrow T \rightarrow$ 验算。有时可能对系统的带宽有要求,则此时校正过程为: $K \rightarrow \omega_m(\omega''_c) \rightarrow a \rightarrow \varphi_m \rightarrow T \rightarrow$ 验算,此时有以下公式:

$$-L'(\omega'_c) = 10 \lg a \rightarrow \omega_m = \omega''_c \rightarrow \varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \rightarrow T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$$

2. 串联迟后校正

迟后校正就是利用迟后网络的高频衰减特性,使校正后系统穿越频率 ω''_c 下降,即 $\omega''_c < \omega'_c$,从而提高系统的相位。为了使迟后网络的相位迟后特性对校正后的系统影响较小,一般要求 $\frac{1}{bT}$ 远小于 ω''_c 。具体过程如下:

(1) 根据稳态误差要求,确定开环增益 K ;绘制在 K 值已确定下的对数幅频特性图。

(2) 求出未校正系统的穿越频率 ω'_c 和相位裕量 γ 。

(3) 根据期望的相位裕量 γ_0 ,估算出未校正系统中相角裕量为 $\gamma = \gamma_0 + \epsilon$ 处的频率 ω''_c ,一般 $\epsilon = 10^\circ \sim 15^\circ$;因迟后网络在 ω''_c 处有负的相角,即由式 $\pi + \angle G(j\omega''_c) = \gamma$,求出 ω''_c 。

(4) 令未校正系统在 ω''_c 处的增益等于 $-20 \lg b$,即由式 $20 \lg |G(j\omega''_c)| = -20 \lg b$,求出 b 值。

(5) 令 $\frac{1}{bT} = \frac{\omega''_c}{2} \sim \frac{\omega''_c}{10}$, 求出 T 值, 即使 $\frac{1}{bT}$ 远离于 ω''_c , 使迟后网络在 ω''_c 处产生的相位迟后量较小。

(6) 验证校正后系统的性能指标, 若不满足要求, 可重新选定 T 值使其加大, 但 T 值不应太大。

上述过程可简单描述为: $K \rightarrow \gamma \rightarrow \omega''_c \rightarrow b \rightarrow T \rightarrow$ 验算。

3. 串联迟后—超前校正

迟后超前校正兼有迟后校正和超前校正的优点。将迟后作用设置在低频段, 利用迟后部分的幅值衰减特性提高系统的稳态精度; 将超前作用设置在中频段, 利用超前部分的相角超前特性提高系统动态性能。中频段要有一定大小的范围, 以确保迟后校正和超前校正的优点充分发挥, 从而全面提高系统的动态性能和稳态性能。

其校正方法所遵循的原则是: 校正后系统的穿越频率 ω''_c 应落在图 6-6 中 +20 dB/dec 部分, 即超前作用设置在中频段, 且中频段要有一定大小的范围; 而使迟后网络的相位迟后特性对校正后系统的影响较小, 一般要求 $\frac{1}{T_b}$ 远小于 ω''_c ; 另外, 不要使校正后的系统特性过于复杂和便于实现。具体过程如下:

(1) 根据稳态误差要求, 确定开环增益 K ; 绘制在 K 已确定下的对数幅频特性 $L'(\omega)$ 。

(2) 求出未校正系统的穿越频率 ω'_c 和相位裕量 γ 。

(3) 根据期望的性能指标(如带宽、快速性等)选择合适的 ω''_c 值; 由校正后的穿越频率 ω''_c 选择合适的 $\frac{1}{T_b}$ 值; $\frac{1}{T_b}$ 的选择要保证 ω''_c 落入超前部分, 不一定按超前校正方法要求 ω''_c 等于最大超前角所对应的频率 ω_m 。为了使校正后的系统特性不过于复杂和便于实现, 一般选择 $L'(\omega)$ 上中频附近从 -20 ~ -40 dB/dec 的转折频率作为校正网络超前部分的转折频率 $\frac{1}{T_b}$, 由此即得到 T_b 值。

(4) 令未校正系统在 ω''_c 处的增益 $L'(\omega''_c)$ 等于校正网络在 ω''_c 处的增益 $20 \lg a - 20 \lg(T_b \omega''_c)$, 以保证 ω''_c 为校正后的穿越频率, 即由式 $L'(\omega''_c) = 20 \lg a - 20 \lg(T_b \omega''_c)$ 求出 a 。

(5) 根据 $\frac{1}{T_a}$ 远小于 ω''_c 的要求, 选择 $\frac{1}{T_a}$ 。一般取 $\frac{1}{T_a} = \frac{\omega''_c}{2} \sim \frac{\omega''_c}{10}$ 。

(6) 验证校正后系统的性能指标, 若不满足要求, 可重新选定第(3)步和第(4)步中的 T_b 和 a 值使最大超前角频率接近 ω''_c 处, 也可加大第(5)步的 T_a 值, 使 $\frac{1}{T_a}$ 更远小于 ω''_c ; 有时这两种修订同时进行, 直到满足要求为止。

4. 按期望频率特性设计串联校正

期望对数幅频特性的确定分别按三个频段考虑(参见基本概念部分):

(1) 低频段按稳态性能确定;

(2) 中频段按动态性能确定;

(3) 高频段尽可能接近未校正系统的特性, 以简化校正装置。

一般地期望幅频特性其中频段附近为 2-1-2 型, 如图 6-7 所示; 相应的传递函数为

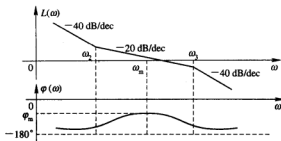


图 6-7 期望的幅频特性

$G(s) = \frac{k(T_2 s + 1)}{s^2(T_3 s + 1)}$, 中频宽为 $H = \frac{T_2}{T_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$, 在 $\omega_m = \sqrt{\omega_2 \omega_3}$ 处有最大的 $\gamma(\omega_m) = \pi + \varphi(\omega)$ 。当 $\omega_c \approx \omega_m$ 时, 有最大的相角裕量和最小的谐振峰值 M_r 。基于这一特点, 在设计期望特性时要求中频段附近满足下式:

$$\omega_2 \leq \omega_c \frac{M_r - 1}{M_r} = \omega_c \frac{2}{1 + H}, \quad \omega_3 \geq \omega_c \frac{M_r + 1}{M_r} = \omega_c \frac{2H}{1 + H}$$

ω_3 的变化对 M_r 值影响较大, ω_2 对 M_r 影响较小, 所以后一不等式是否满足则尤为重要。

当 H 值较大时, 可取 $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_c$, $\omega_3 = 2 \omega_c$ 。

期望频率特性的具体校正方法如下:

- (1) 在 K 值已知的情况下, 绘制未校正系统的对数幅频特性;
- (2) 按性能要求和未校正系统的对数幅频特性的特点, 绘制期望的对数幅频特性;
- (3) 将期望的对数幅频特性减去未校正系统的对数幅频特性, 从而得到串联校正装置的频率特性;
- (4) 进行验证, 若不满足要求, 在第(2)步调整期望特性的有关参数, 直到满足为止。

6.4 反馈校正

对于图 6-8 所示的反馈校正控制系统, 其局部反馈部分的频率特性为:

$$G_{2c}(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_c(j\omega)}$$

用频率特性方法设计反馈校正装置时, 首先应使内环稳定, 然后利用下述近似公式去设计。

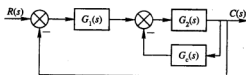


图 6-8 反馈校正图

当 $|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 1$ 或 $20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 0$ 时, $G_{2c}(j\omega) \approx \frac{1}{G_c(j\omega)}$

当 $|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \ll 1$ 或 $20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \ll 0$ 时, $G_{2c}(j\omega) \approx G_2(j\omega)$

对于未校正系统中频率特性较差的部分或环节(如该部分在中频附近,其相位角度变化较大等具有对动态性能不利的缺点),用局部反馈将其包围,并使系统动态性能起主要影响的频率范围内有 $|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 1$,那么此时系统频率特性表现为 $G_{2c}(j\omega) \approx 1/G_c(j\omega)$,而与 $G_2(s)$ 无关,即在满足 $|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 1$ 的频率范围内,用 $1/G_c(j\omega)$ 频率特性来代替这段频率特性,从而改善系统的动态性能;在频率较高时有 $|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \ll 1$,那么此时频率特性表现为 $G_{2c}(j\omega) \approx G_2(j\omega)$,保持原系统高频衰减的特性。另外,由于局部负反馈,使反馈校正具有串联校正所没有的优点,如可以削弱非线性影响,减小时间常数,降低参数变化的敏感性,抑制噪声等特点。 $G_c(s)$ 的设计可参照串联校正方法进行。以图 6.8 为例,具体设计过程如下:

(1) 根据稳态精度要求,确定开环增益 K ,并在 K 已确定的情况下,绘制未校正系统的开环对数幅频特性 $L'(\omega) = 20 \lg |G_1(j\omega)G_2(j\omega)|$,求出未校正时的有关指标。

(2) 按系统性能要求绘制期望对数幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$ (参照期望频率特性的基本要求,结合原系统频率特性特点绘制)。

(3) 根据校正装置 $G_c(s)$ 起作用和不起作用的条件,可得:

满足 $L(\omega) = L'(\omega)$ 的频段,为校正装置不起作用的频段;

满足 $L(\omega) \ll L'(\omega)$ 的频段,为校正装置起作用的频段。

在这一频段内,由式 $L(\omega) = L'(\omega) - 20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)|$ 确定 $20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)|$,并按校正装置不起作用的条件,确定该频段内的特性 $20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)|$ 。由于整个频率范围的特性 $20 \lg |G_2(j\omega)G_c(j\omega)|$ 是已知的,即得到 $G_2(s)G_c(s)$ 的表达式。

(4) 对于确定的 $G_2(s)$,有 $G_c(s) = \frac{G_2(s)C_c(s)}{G_2(s)}$ 。

(5) 验证有关性能指标。若不满足要求,可修改第(2)步,即修改期望特性,也可通过修改局部反馈所包围的范围不断接近要求,直到满足要求为止。

6.5 其它校正

其它校正有前文所述的前馈校正和复合校正等,在此部分仅介绍这两种校正。对于前馈校正,可使串联校正后的系统性能进一步提高。由于串联校正使系统增加了一个闭环零点,为了消除该零点的不利影响,可按图 6-3(b)设计一个前馈装置 $G_p(s)$,用于抵消原系统的不利闭环零点,从而减小系统超调量。如仅采用串联校正(此时 $G_p(s) = 1$)后系统的闭环传递函数为 $\phi(s) = \frac{2.08(s+0.75)}{(s+1)(s+0.75)^2+1}$,超调量为 17.6%,则加入前馈校正装置 $G_p(s) = \frac{0.75}{s+0.75}$,超调量将下降为 2%。一般情况下,串联迟后校正装置的零点对系统响应的影响较小,可以不必为系统设计前馈装置;而串联超前校正装置的零点对系统响应的影响较大,可以设计前馈装置 $G_p(s)$ 来有效地减小该零点的影响。

对于图 6-3(a)和图 6-2 所示的复合校正结构图,图 6-3(a)为按输入补偿的复合控制,图 6-2 为按干扰补偿的复合控制。对于图 6-3(a),当 $G_r(s) = 1/G_2(s)$ 时,有 $C(s) = R(s)$,使输出完全复现输入;对于图 6-2,当 $G_n(s) = -1/G_1(s)$ 时,有 $G_n(s) = 0$,使输出完全不受扰动影响。

由于要求 $G_r(s)$ 或 $G_n(s)$ 都是分子的次数高于分母的次,表现为比例微分(甚至为高阶的)特性,在实际应用中无法实现,这是线性系统理论在实际运用中的局限性。因此,在实际应用中多在对系统性能起主要影响的频段内采用近似全补偿,或者采用稳态全补偿,以使 $G_r(s)$ 或 $G_n(s)$ 形式简单并便于物理实现。

6.6 例题讲解

本章的重点内容,就是选择一种合适的校正装置,使系统性能满足要求。最常用的校正方法是串联校正。校正过程中,要熟练利用频率特性的高、中、低三段,对系统性能的影响,可简化或具有针对性地设计或修改校正装置中的参数。校正方法不是一成不变的,在具体校正过程中要灵活运用。注意:校正最后一定要有验证结论。

例 6.1 某单位反馈系统校正前的开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{100}{s(0.04s+1)(0.01s+1)}$$

校正后开环传递函数为

$$G_2(s) = \frac{0.5s+1}{5s+1} \cdot G_1(s)$$

- (1) 试求校正前后系统的相位裕量,校正前后系统是否稳定?
- (2) 说明校正后闭环时域指标(t_s 和 $\delta\%$)及闭环频域指标(ω_r 和 M_r)大致为多少。

解 系统校正前后的伯德图如图 6-9 所示。设校正前后的穿越频率分别为 ω_{c1} 和 ω_{c2} 。

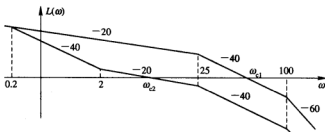


图 6-9

(1) 校正前:

$$\text{由 } 20 \lg 100 - 20 \lg \frac{25}{1} - 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{25} = 0$$

得

$$\omega_{c1} = 50 \text{ s}^{-1}$$

相位裕量

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.04\omega_{c1} - \arctan 0.01\omega_{c1} = 0.05^\circ$$

故校正前系统是稳定的,但稳定裕量太小,相对稳定性很差,系统中参数向不利的方向作微小变化,系统就可能变为不稳定系统。

校正后:

$$\text{由} \quad 20 \lg 100 + 20 \lg \frac{0.2}{1} - 40 \lg \frac{2}{0.2} - 20 \lg \frac{\omega_{c2}}{2} = 0$$

得 $\omega_{c2} = 10 \text{ s}^{-1}$ 。

相位裕量

$$\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ + (\arctan 0.5\omega_{c2} - \arctan 5\omega_{c2}) - \arctan 0.04\omega_{c2} - \arctan 0.01\omega_{c2} = 52.3^\circ$$

故校正后系统稳定且稳定裕量有较大提高。实际上,本题校正装置为迟后网络,串联迟后校正使 ω_c 下降,系统抗干扰能力提高,但响应速度下降。

(2) 运用高阶系统的经验公式有:

校正后

$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma_2} = \frac{1}{\sin 52.3^\circ} = 1.26$$

$$\delta\% \approx 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 26.4\%$$

$$K_o = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 2.559$$

$$\omega_r \approx \omega_{c2} \cos \gamma_2 = 6.12 \text{ s}^{-1}$$

$$t_s \approx \frac{K_o \pi}{\omega_{c2}} = 0.8 \text{ s}$$

例 6.2 证明如图 6-10 所示三阶期望特性可能达到的最大相角裕量 γ 和中频段宽度 $h = \omega_3/\omega_2$ 的关系为 $\gamma = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}}$ 。当满足 $\sin \gamma = \frac{1}{M_r}$ 的关系时, h 和 M_r 的关系为

$$M_r = \frac{h+1}{h-1} \text{ 或 } h = \frac{M_r+1}{M_r-1}.$$

证明 令 $\omega_2 = 1/T_2$, $\omega_3 = 1/T_3$, 则 $T_2 = hT_3$ 。

图 6-10 所示的系统为 II 型系统, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^3(T_3 s + 1)}$$

其相应的相角为

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan T_2 \omega - \arctan T_3 \omega$$

令

$$\gamma' = 180^\circ + \varphi(\omega) = \arctan T_2 \omega - \arctan T_3 \omega$$

当 $\frac{d\gamma'}{d\omega} = 0$ 时, γ' 具有最大值 γ'_m 。 γ'_m 及其相应的频率 ω_m 为:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_2 T_3}} = \frac{1}{T_3 \sqrt{h}} \quad \gamma'_m = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}}$$

若 $\omega_c = \omega_m$, 则 γ'_m 为系统可能达到的最大相角裕量 $\gamma = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}}$ 。

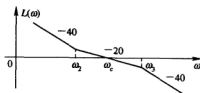


图 6-10

当 $\sin \gamma = \frac{1}{M_r}$ 即 $\tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{M_r^2 - 1}}$ 时, 有 $\tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{M_r^2 - 1}} = \frac{h-1}{2\sqrt{h}}$ 。

则可得 h 和 M_r 的关系为 $M_r = \frac{h+1}{h-1}$ 或 $h = \frac{M_r+1}{M_r-1}$ 。

例 6.3 设 I 型单位反馈系统原有部分的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)}$, 要求设计串联校正装置, 使系统具有 $K = 12$ 及 $\gamma_o = 40^\circ$ 的性能指标。

解 串联校正的第一步往往都是根据稳态要求, 确定开环增益 K 。

本题根据题目要求取 $K = 12$, 并画出 $K = 12$ 时未校正系统的伯德图 $G_o(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)}$, 见图 6-11(a) 中虚线部分。

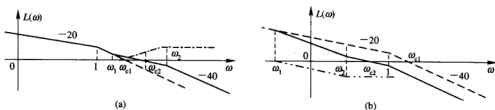


图 6-11

设 $K = 12$ 时未校正系统的穿越频率为 ω_{c1} , 由 $20 \lg K = 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{1}$ 得 $\omega_{c1} = \sqrt{12} = 3.45 \text{ s}^{-1}$ 。

此时相位裕量 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_{c1} = 16.12^\circ < \gamma_o = 40^\circ$

显然此结果不满足系统性能指标要求, 故需加入校正环节。

由于 ω_{c1} 附近为 -40 dB/dec 斜率的折线, 可通过加入超前网络使校正后的穿越频率 $\omega_{c2} (> \omega_{c1})$ 附近的折线斜率变为 -20 dB/dec ; 另外由于本题在低频段 ($\omega < 1 \text{ s}^{-1}$) 的折线斜率为 -20 dB/dec , 同时本题对 ω_c 无限制, 所以也可用迟后网络使校正后的穿越频率 $\omega_{c2} (< 1 \text{ s}^{-1})$ 达到校正的目的。

方法一 超前校正。

设校正后的穿越频率为 ω_{c2} , ω_{c2} 处需补偿的超前角取为:

$$\varphi_m = \gamma_o - \gamma + \varepsilon = 40^\circ - 16.12^\circ + 6.12^\circ = 30^\circ$$

所以

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = 0.334$$

令校正网络最大超前角为 φ_m , 其对应的频率为 ω_m 且 $\omega_m = \omega_{c2}$, 则校正网络在 ω_m 处的增益为 $-10 \lg \alpha$ 。

令 $-10 \lg \alpha = 40 \lg \frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}}$ (见图 6-11(a)), 得 $\omega_{c2} = \omega_{c1} \sqrt[4]{3} = 4.55 \text{ s}^{-1}$, 则校正网络的两个转折频率分别为

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 2.63 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\alpha \tau} = \omega_m / \sqrt{\alpha} = 7.9 \text{ s}^{-1}$$

为了补偿超前校正网络(无源)的增益衰减了 α , 应再加入放大倍数为 $1/\alpha = 3$ 的放大器。超前校正网络为 $G_c(s) = \frac{(s/2.63) + 1}{(s/7.9) + 1}$, 见图 6-11(a)中的双点划线。

所以经校正后, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{12[(s/2.63) + 1]}{[s(s+1)(s/7.9) + 1]}$$

验证:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_{c2}/2.63) - \arctan\omega_{c2} - \arctan(\omega_{c2}/7.9) = 42.4^\circ > 40^\circ$$

可见校正后性能满足要求, 校正后的伯德图见图 6-11(a)。

方法二 迟后校正。

设校正后的穿越频率为 ω_{c2} , 迟后网络系数为 β , 其转折频率分别为 ω_1 和 ω_2 。

首先计算未校正系统中对应于相角裕量为 $\gamma = \gamma_o + \epsilon = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$ 的频率 ω_{c2} 。

$$\text{令 } \gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\omega_{c2} = 55^\circ, \text{ 解得 } \omega_{c2} = 0.7 \text{ s}^{-1}.$$

又令未校正系统在 $\omega = \omega_{c2} = 0.7 \text{ s}^{-1}$ 处的开环增益等于 $20 \lg \beta$, 得

$$20 \lg k + 20 \lg \frac{1}{0.7} = 20 \lg \beta$$

可求出 $\beta = 17$ 。

$$\text{选取 } \omega_2 = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{c2}}{4} = 0.175 \text{ s}^{-1}, \text{ 则 } \omega_1 = \frac{1}{\beta \tau} = 0.01 \text{ s}^{-1}.$$

迟后校正网络为 $G_c(s) = \frac{(s/0.175) + 1}{(s/0.01) + 1}$, 见图 6-10(b)中的双点划线。

所以经校正后, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{12[(s/0.175) + 1]}{[s(s+1)(s/0.01) + 1]}$$

验证:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan(\omega_{c2}/0.175) - \arctan\omega_{c2} - \arctan(\omega_{c2}/0.01) = 41^\circ > 40^\circ$$

可见校正后性能满足要求, 校正后的伯德图见图 6-11(b)。

讨论: 由于本题对响应速度(即对穿越频率 ω_c 或截止频率 ω_b 或调节时间 t_s 等)无要求, 因此既可以用超前校正, 也可以用迟后校正, 当然用迟后—超前校正也能满足要求。从解题过程可知, 若要求 $\omega_{c2} > \omega_{c1}$, 校正网络只能选择超前校正或迟后—超前校正网络; 若要求 $\omega_{c2} < \omega_{c1}$, 校正网络只能选择迟后校正或迟后—超前校正网络。当然为了使校正网络简单、便于实现, 在满足校正要求下, 应尽可能选用结构简单的校正装置。

频率校正方法主要根据相位裕量 γ 和穿越频率 ω_c ; 若已知其它指标可将其转化为相应的 γ 和 ω_c ; 若对幅值裕量 K_g 有要求, 校正时仍从 γ 和 ω_c 要求出发设计校正网络, 验证时要对 K_g 进行分析, 若 K_g 不满足要求, 可根据系统频率特性调整前面的校正参数, 直到 K_g 满足要求为止。最后强调的是, 一定要有验证过程。

例 6.4 某单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_1(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$, 假设其动态性能已满足要求, 但速度输入时系统的稳态误差过大, 要求设计串联校正装置, 在维持系统的动态性能基本不变的情况下, 使速度误差系数为 $k_v = 10$ 。

解 原系统的对数幅频特性如图 6-12 中虚线 $L_1(\omega) = 20 \lg |G_1(j\omega)|$ 所示, 此时穿

越频率 $\omega_{c1} = 1 \text{ s}^{-1}$, 相位裕量

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_{c1} - \arctan 0.1\omega_{c1} = 58^\circ$$

要使 $k_s = 10$, 可将 $G_1(s)$ 增益增大 10 倍;

此时开环传递函数为

$$G_2(s) = \frac{10}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

其相应的对数幅频特性为原系统的对数幅频特性向上平移 $20 \lg 10 = 20 \text{ dB}$, 见图 6-12 中点划线所示。

设 $L_2(\omega) = 20 \lg |G_2(j\omega)|$ 的穿越频率为 ω_{c2} , 则有

$$20 \lg 20 - 20 \lg \frac{2}{1} - 40 \lg \frac{\omega_{c2}}{2} = 0$$

解得

$$\omega_{c2} = 2\sqrt{5} = 4.47 \text{ s}^{-1}$$

此时, 相位裕量

$$\gamma_2 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_{c2} - \arctan 0.1\omega_{c2} = 0^\circ$$

上述计算表明, 仅提高开环增益 K , 使系统的动态性能变坏, 甚至可能出现不稳定, 必须进行校正。

由题目要求可知, 校正后应基本维持原系统动态性能不变, 即要求校正后 ω_c 在 $\omega_{c1} = 1 \text{ s}^{-1}$ 附近, γ 在 $\gamma_1 = 58^\circ$ 附近。因 $\omega_{c1} < \omega_{c2}$, 所以可选用迟后校正。

设迟后网络系数为 β , 其转折频率分别为 ω_1 和 ω_2 。

可令校正后穿越频率 $\omega_c = \omega_{c1} = 1 \text{ s}^{-1}$, 则有 $20 \lg \beta = 20 \lg k_s$, 由此得 $\beta = 10$ 。

为了使迟后网络的迟后相对 $\omega_c = \omega_{c1} = 1 \text{ s}^{-1}$ 处相角影响较小, 选取 $\omega_2 = 1/\tau = \omega_c/5 = 0.2 \text{ s}^{-1}$, 则 $\omega_1 = 1/\beta\tau = 0.02 \text{ s}^{-1}$, 那么迟后校正网络为

$$G_c(s) = \frac{(s/0.2) + 1}{(s/0.02) + 1} = \frac{5s + 1}{50s + 1}$$

此时 $G_c(j\omega)$ 在 $\omega_c = 1 \text{ s}^{-1}$ 处所产生的迟后角为 $\Delta\varphi = \arctan 5 - \arctan 50 = -10^\circ$, 可见 $G_c(j\omega)$ 在 $\omega_c = 1 \text{ s}^{-1}$ 处所产生的迟后角较大, 将对动态性能产生较明显的影响。可将上述 ω_2 选取得再小些。

取 $\omega_2 = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_c}{10} = 0.1 \text{ s}^{-1}$, 则 $\omega_1 = \frac{1}{\beta\tau} = 0.01 \text{ s}^{-1}$; 那么迟后校正网络为 $G_c(s) =$

$\frac{10s+1}{100s+1}$, 见图 6-12 中双点划线。此时 $G_c(j\omega)$ 在 $\omega_c = 1 \text{ s}^{-1}$ 处所产生的迟后角为 $\Delta\varphi = \arctan 10 - \arctan 100 = -5^\circ$ 。

则校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_2(s) = \frac{10s+1}{100s+1} \cdot \frac{10}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

验证: 相位裕量为 $\gamma = \gamma_1 + \Delta\varphi = 58^\circ - 5^\circ = 53^\circ$, 基本维持不变, 但系统的开环增益提高了 β 倍, 见图 6-12 中实线。

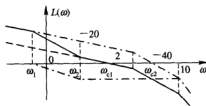


图 6-12

例 6.5 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$ ，试设计串联校正装置，使系统的相位裕量不小于 45° ，穿越频率不低于 55 s^{-1} 。

解 校正前原系统的对数幅频特性如图 6-13 中虚线所示。设校正前穿越频率(剪切频率)为 ω_{c1} ，相位裕量为 γ_1 ，则有

$$20 \lg 200 - 20 \lg \frac{10}{1} - 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{10} = 0$$

解得

$$\omega_{c1} = 44.7 \text{ s}^{-1} < \omega_c = 55 \text{ s}^{-1}$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_{c1} = 12.6^\circ < \gamma_o = 45^\circ$$

不满足性能要求，需要校正。

因为期望的 ω_c 大于 ω_{c1} ，所以要选用超前校正装置。

超前校正装置所需的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma_o - \gamma_1 + \epsilon(5^\circ \sim 12^\circ) = 45^\circ - 12.6^\circ + 10.6^\circ = 43^\circ$$

则

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = 0.19$$

设校正后穿越频率为 ω_c 且 $\omega_c = \omega_m$ 。令 $-10 \lg \alpha = 40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_{c1}}$ ，解得 $\omega_c = 67.8 \text{ s}^{-1}$ 。那么

$$\omega_1 = \omega_c \sqrt{\alpha} = 29.5 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 156 \text{ s}^{-1}$$

超前校正装置的传递函数为 $G_c(s) = \frac{0.034s+1}{0.0064s+1}$ ，见图 6-13 中双点划线。

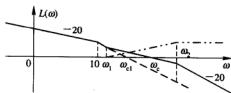


图 6-13

则校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{0.034s+1}{0.0064s+1} \cdot \frac{200}{s(0.1s+1)}$$

验证：

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c + \arctan 0.034\omega_c - \arctan 0.0064\omega_c = 51.5^\circ > 45^\circ$$

满足要求。

讨论：校正后 ω_c 和 γ 都满足要求且有一定的裕量，要使 ω_c 和 γ 更接近期望的值，可以适当减小 φ_m 式中的补偿量 ϵ 的值。

例 6.6 设某随动系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)(0.167s+1)}$ ，要求在最大指令速度 $180^\circ/\text{s}$ 下，系统跟踪位置滞后不超过 1° 。试设计串联校正装置，并使系统满

足下列性能指标: $\gamma > 40^\circ$, $3 \text{ s}^{-1} < \omega_c < 5 \text{ s}^{-1}$ 。

解 因速度误差系数 $k_v = \text{最大输出速度} / \text{允许稳态误差} = 180^\circ / 1^\circ = 180$, 即要求 $K = k_v = 180$ 。

首先绘制未校正系统在 $K = 180$ 的对数幅频特性如图 6-14(a) 中虚线所示。

设未校正前穿越频率(剪切频率)为 ω_{c1} , 相位裕量为 γ_1 , 则有

$$20 \lg 180 - 20 \lg \frac{2}{1} - 40 \lg \frac{6}{2} - 60 \lg \frac{\omega_{c1}}{6} = 0$$

解得

$$\omega_{c1} = 12.9 \text{ s}^{-1}$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5 \omega_{c1} - \arctan 0.167 \omega_{c1} = -56.35^\circ$$

这表明未校正系统不稳定, 不满足要求, 需要校正。

从上述计算结论可知, 若仅用超前校正, 会使校正后的穿越频率 $\omega_c (> \omega_{c1})$ 提高, 这显然不满足 ω_c 的要求; 另外即使撤开 ω_c 的要求, 此时所需的超前网络最大超前角 φ_m (至少大于 $\gamma_c - \gamma_1 = 40^\circ + 56^\circ = 96^\circ$) 也是很大, 过大的 φ_m 工程上也不便于实现, 甚至还会造成其它性能问题。能否仅用迟后校正呢? 由于要求校正后 $3 \text{ s}^{-1} < \omega_c < 5 \text{ s}^{-1}$, 从未校正系统的相频特性可知, ω 越小, 相位迟后量越小, 也就是说若校正后的穿越频率为 3 s^{-1} 时, 系统的相位裕量最大; 假设迟后网络本身所造成的迟后量为零(实际上小于零), 有下式

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5 \times 3 - \arctan 0.167 \times 3 = 7.1^\circ < 40^\circ$$

若考虑到迟后网络的相位 γ' 将更小, 则仅用迟后网络校正也不能达到要求, 必须用迟后—超前网络校正。

方法一 迟后网络和超前网络分别设计。

因为要求 $3 \text{ s}^{-1} < \omega_c < 5 \text{ s}^{-1}$, 可取校正后 $\omega_c = 4 \text{ s}^{-1}$, 并使 ω_c 处于超前校正网络的几何中心 ω_m 处, 即 $\omega_c = \omega_m$ 。设超前网络系数为 α , 转折频率分别为 ω_3 和 ω_4 。

$\omega = \omega_c = 4 \text{ s}^{-1}$ 时未校正系统的相角为

$$\varphi_1(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5 \omega - \arctan 0.167 \omega = -187.2^\circ$$

那么超前网络在 $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ 处至少产生 $\varphi_m = 40^\circ - (180^\circ - 187.2^\circ) = 47.2^\circ$ 的超前角, 取 $\varphi_m = 60^\circ$, 则

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 14, \omega_3 = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = 1.1 \text{ s}^{-1}, \omega_4 = \omega_c \sqrt{\alpha} = 4 \sqrt{14} = 15 \text{ s}^{-1}$$

下面确定迟后网络的参数。设迟后网络系数为 β , 转折频率分别为 ω_1 和 ω_2 。

未校正系统在 $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ 处的幅值为

$$L_1(\omega) = 60 \lg \frac{\omega_{c1}}{6} + 40 \lg \frac{6}{4} = 20 \lg 22.4$$

从图 6-13(a) 可见, 要使 $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ 成为校正后的穿越频率, 必有

$$20 \lg \beta - 10 \lg \alpha = 20 \lg 22.4$$

解得

$$\beta = 84$$

取 $\omega_2 = \frac{\omega_c}{8} = 0.5$, 则 $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.006$, 故迟后超前网络为

$$G_c(s) = \frac{s/\omega_2 + 1}{s/\omega_1 + 1} \cdot \frac{s/\omega_3 + 1}{s/\omega_4 + 1} = \frac{2s + 1}{167s + 1} \cdot \frac{0.9s + 1}{0.067s + 1}$$

其对数幅频特性见图 6-14(a) 中双点划线。校正后系统的对数幅频特性见图 6-14(a) 中实线。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{2s+1}{167s+1} \cdot \frac{0.9s+1}{0.067s+1} \cdot \frac{180}{s(0.5s+1)(0.167s+1)}$$

验证:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.167\omega_c + (\arctan 2\omega_c - \arctan 167\omega_c) \\ &\quad + (\arctan 0.9\omega_c - \arctan 0.067\omega_c) \\ &= 45.3^\circ > 40^\circ \end{aligned}$$

满足要求。

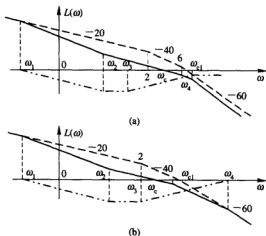


图 6-14

方法二 按期望特性设计,即根据要求首先绘制期望特性,再求 $G_c(s)$,期望特性按三步设计。

第一步:中频段,取校正后的频率 ω_c 处于 $\omega_c = 4 \text{ s}^{-1}$ 处,然后过 $(\omega_c, 0)$ 点作斜率为 -20 dB/dec 的直线作为期望特性的中频段,见图 6-14(b)。

第二步:低频段,选 $K = 180$ 时未校正系统的低频段(即起始斜率为 -20 dB/dec 段)作为期望特性的低频段;由于低频段为斜率是 -20 dB/dec 的直线,它与中频段斜率为 -20 dB/dec 的直线之间必须有连接线,连接线斜率为 -40 dB/dec ;连接线与中频段的交点频率 ω_2 即交接(转折)频率,见图 6-14(b),该频率距 ω_c 不宜太近(因 ω_2 为迟后校正环节的转折频率),否则难于保证系统的相位裕量要求。一般按 $\omega_2 = \frac{\omega_c}{2} \sim \frac{\omega_c}{10}$ 的原则选取 ω_2 ,

现选取 $\omega_2 = \frac{\omega_c}{8} = 0.5 \text{ s}^{-1}$ 。

第三步:高频段,为使校正装置不至于复杂,期望特性的高频段往往也取为与未校正系统的高频段一致。由于未校正系统的高频段斜率为 -60 dB/dec ,故它与中频段之间也

应有斜率为 -40 dB/dec 的直线作为连接线。此连接线与中频段的交点为转折频率 ω_3 ，见图6-14(b)。该频率 ω_3 距 ω_c 也不宜太近，否则也对系统的相位裕量影响较大。考虑到校正系统应有一个转折频率为 2 s^{-1} 的惯性环节，为使校正装置尽可能便于实现，将 ω_3 直接选为 2 s^{-1} 。

综合上述三步，可绘制出系统期望特性，如图6-14(b)中实线所示。

实线(校正后的)减去虚线(未校正的)得到迟后-超前环节 $G_c(s)$ 的对数幅频特性，见图6-14(b)中的双点划线。

$$\text{设 } G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} \cdot \frac{T s + 1}{T s / \beta + 1} \quad (\beta > 1)$$

$$\text{则 } \tau = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{0.5} = 2\text{ s}, T = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{2} = 0.5\text{ s}$$

现需确定 β ：由于期望特性的穿越频率为 $\omega_c = 4\text{ s}^{-1}$ ，则期望特性在 $\omega_2 = 0.5\text{ s}^{-1}$ 处的增益为 $20\lg\frac{4}{0.5} = 18\text{ dB}$ ，而未校正系统在 $\omega = \omega_2 = 0.5\text{ s}^{-1}$ 时增益为 $20\lg\frac{180}{0.5} = 51\text{ dB}$ ，故

$$20\lg\beta = 51 - 18$$

$$\text{解得 } \beta = 45, \omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.011\text{ s}^{-1}, \omega_4 = \beta\omega_3 = 90\text{ s}^{-1}$$

所以

$$G_c(s) = \frac{2s + 1}{90s + 1} \cdot \frac{0.5s + 1}{0.011s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{2s + 1}{90s + 1} \cdot \frac{0.5s + 1}{0.011s + 1} \cdot \frac{180}{s(0.5s + 1)(0.167s + 1)}$$

验证：

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.167\omega_c - \arctan 90\omega_c - \arctan 0.011\omega_c + \arctan 2\omega_c \\ &= 46.8^\circ > 40^\circ \end{aligned}$$

满足要求。

讨论：两种方法得出的 $G_c(s)$ 是不一样的，但它们都满足设计要求，即使是同一种方法也会得出不同的结论。如方法一中，首先取 $\omega_c = 4\text{ s}^{-1}$ ，也可取 $3\text{ s}^{-1} < \omega_c < 5\text{ s}^{-1}$ 范围内的其它值；其次 φ_m 取 60° ，也可取大于 47° 的其它数值。从方法一最后验证可知， φ_m 可适当取小些，另外 β 也可取小些。对于方法二， ω_c 也可不取为 4 s^{-1} ， ω_2 也可不取为 $\omega_2 = \omega_c/8$ ，都会得出不同的校正网络。

比较两种方法，显然方法二设计较为简单，并且所设计出的 $G_c(s)$ 也不复杂，而方法一中 $G_c(s)$ 的迟后环节和超前环节的系数不同，所设计出的 $G_c(s)$ 较复杂。

例 6.7 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)}$ ，要求系统的速度误差系数 $k_v = 20$ ，相位裕量 $\gamma > 50^\circ$ ，幅值裕量 $K_g \geq 10\text{ dB}$ ，试设计串联校正装置。

解 首先绘制 $K = k_v = 20$ 时未校正系统的对数幅频特性，见图6-15中虚线所示。设未校正前穿越频率(剪切频率)为 ω_{c1} ，相位裕量为 γ_1 ，幅值裕量为 K_{g1} 。

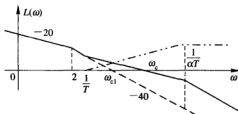


图 6-15

由 $20 \lg 20 - 20 \lg \frac{2}{1} - 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{2} = 0$ 解得 $\omega_{c1} = 6.3 \text{ s}^{-1}$

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_{c1} = 18^\circ < \gamma = 50^\circ$$

其相位角度为 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega_{c1}$

因为 $|\varphi(\omega)| < 180^\circ$, 所以 $K_g \rightarrow \infty$ 。

故系统是稳定的, 但是有较大的超调量, 不满足动态性能要求, 需要校正。

本题可用迟后校正也可用超前校正, 见例 6.3 中的说明。

在此, 仅给出超前校正网络的设计。设其传递函数为 $G_c(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} (\alpha > 1)$, 超前校

正网络应提供的最大超前角为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_1 + \epsilon = 50^\circ - 18^\circ + 3^\circ = 35^\circ \quad (\epsilon \text{ 取 } 3^\circ)$$

则

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 3.7$$

超前网络对应于 φ_m 的频率 ω_m 处的幅值增益为 $10 \lg \alpha = 5.7 \text{ dB}$ 。

根据未校正系统在 ω_m 的幅值增益应为 $L(\omega) = -5.7 \text{ dB}$, 可求出 ω_m 。

由 $40 \lg \frac{\omega_m}{\omega_{c1}} = 5.7$ 得 $\omega_m = 8.8 \text{ s}^{-1}$, 令校正后的穿越频率为 $\omega_c = \omega_m = 8.8 \text{ s}^{-1}$, 则

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} = 0.06 \quad G_c(s) = \frac{0.22s + 1}{0.06s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{0.22s + 1}{0.06s + 1} \cdot \frac{20}{s(0.05s + 1)}$$

验证: $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.06\omega_c + \arctan 0.022\omega_c = 47.6^\circ < 50^\circ$, 这仍不满足要求。

可将 ϵ 取大些, 如取 $\epsilon = 12^\circ$, 后续计算过程与前相同, 可得 $\varphi_m = 40^\circ$, $\alpha = 4.6$, $\omega_c = \omega_m = 9.2 \text{ s}^{-1}$, $T = 0.05$, 此时

$$G_c(s) = \frac{0.23s + 1}{0.05s + 1}, \quad G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{0.23s + 1}{0.05s + 1} \cdot \frac{20}{s(0.5s + 1)}$$

验证: $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.05\omega_c + \arctan 0.23\omega_c = 52.2^\circ > 50^\circ$, $K_g \rightarrow \infty$, 满足要求。

校正后对数幅频特性见图 6-14 中实线, 校正环节的对数幅频特性见图 6-14 中的双点划线。

讨论：超前校正利用其相角超前特性，增加相同的带宽，使 ω_c 提高，系统响应速度加快。

本题在校正过程中，最初取的补偿量 ϵ 为 3° ，由于校正前后穿越频率从 6.3 s^{-1} 增大到 8.8 s^{-1} ，对于未校正系统的频率从 6.3 s^{-1} 增大到 8.8 s^{-1} 时，相角变化量为 $-\arctan 0.5 \times 8.8 + \arctan 0.5 \times 6.3 = -4.8^\circ$ ，所以补偿量 ϵ 为 3° 不足以补偿因 ω_c 的提高而造成的 4.8° 迟后， ϵ 必须加大；后一次设计时 ϵ 取为 12° ，完全满足要求；从计算结果看 ϵ 可取略小于 12° ，也能满足要求。一般情况 ϵ 取 $5^\circ \sim 15^\circ$ 范围，当所取的 ϵ 不满足要求时，可适当加大 ϵ 直到满足要求。需要指出的是，并不是所有的超前校正通过加大 ϵ 都能使校正后的系统满足要求，对于 ω_c 略为提高就会造成未校正系统相角迟后量明显加大的系统， ϵ 无论取多少时，总不足以补偿相角的变化量，此时用超前校正正是不能达到设计要求的，这就需要用它校正方法，见例 6.8。

例 6.8 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$ ，要求系统校正后稳态速度误差系数 $k_v = 10$ ，相位裕量 $\gamma(\omega_c) \geq 35^\circ$ 。

解 首先确定 K ：

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = \frac{K}{5} = 10, \quad K = 50$$

则未校正系统的开环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+5)} = \frac{10}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

绘制 $K=50$ 时未校正系统的对数幅频特性 $L_1(\omega)$ ，见图 6-16 中虚线。设未校正系统的穿越频率(剪切频率)为 ω_{c1} ，相位裕量为 γ_1 。

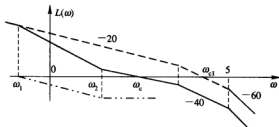


图 6-16

根据 $20 \lg 10 = 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{1}$ ，得 $\omega_{c1} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ s}^{-1}$ 。

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_{c1} - \arctan 0.2\omega_{c1} = -14.8^\circ < 35^\circ$$

故未校正系统不稳定，需要校正。

根据例 6.7 讨论可知， ω_{c1} 接近未校正系统的转折频率 5 s^{-1} ，若采用超前校正，则校正后穿越频率可能大于 5 s^{-1} ，此时未校正系统的相位迟后将明显加大，所以用超前校正难于实现系统性能要求。具体见下列计算：

超前网络需产生的最大超前角为

$$\varphi_m = 35^\circ + 14.8^\circ + \varepsilon = 60^\circ \quad (\varepsilon \text{ 取 } 10.2^\circ), \quad \alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 13.9$$

由 $L_1(\omega_m) = -10 \lg \alpha$, 得 $-40 \lg \frac{5}{\omega_{c1}} - 60 \lg \frac{\omega_m}{5} = -10 \lg 13.9$, 故 $\omega_m = 5.4 \text{ s}^{-1}$ 。

(说明: 通过上式计算可知 ε 取得越大, ω_m 也越大。)

当系统频率从 ω_{c1} 变化到 ω_m 时, 未校正系统相角变化量为 $\Delta\varphi$, 且

$$\Delta\varphi = -\arctan \omega_m - \arctan 0.2\omega_m + \arctan \omega_{c1} + \arctan 0.2\omega_{c1} = -21.2^\circ$$

显然 ε 不足以补偿 $\Delta\varphi$, 即使 ε 再取大些。那么 ε 取小呢?

若取 $\varepsilon = 0$, 此时

$$\varphi_m = 35^\circ + 14.8^\circ = 49.8^\circ, \quad \alpha = 7.45, \quad \omega_m = 5.1 \text{ s}^{-1}, \quad \Delta\varphi = -19.7^\circ$$

通过以上计算可知, 由于 $\Delta\varphi$ 较大, ε 取大或取小都不足以补偿 $\Delta\varphi$, 因而本题不能采用超前校正。

总之, 当未校正系统的 ω_{c1} 接近下一转折频率且该转折点的斜率变化量为负时(本题斜率变化量为 -20 dB/dec), 不宜用超前校正。

由于本题未对系统 ω_c 等与响应速度有关的指标进行要求, 可考虑用迟后校正。

按相位裕量 $\gamma(\omega_c) = 35^\circ$ 的要求, 并考虑迟后网络, 在校正后系统穿越频率 ω_c 处造成相角迟后的影响, 取 $\gamma' = \gamma + \varepsilon = 35^\circ + \varepsilon = 42^\circ$, 与 γ' 相对应的未校正系统相角为 $\varepsilon\varphi(\omega) = \gamma' - 180^\circ = -138^\circ$, 令相应的频率 ω 为校正后系统的穿越频率 ω_c , 可得

$$-90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.2\omega_c = -138^\circ$$

由此求出 $\omega_c = 0.8 \text{ s}^{-1}$ 。

未校正系统在 $\omega = \omega_c = 0.8 \text{ s}^{-1}$ 处增益为

$$L_1(\omega_c) = 20 \lg 10 + 20 \lg \frac{1}{0.8} = 21.9 \text{ dB}$$

设迟后校正网络的系数为 β , 转折频率分别为 ω_1 和 ω_2 , 令 $20 \lg \beta = 21.9$, 得 $\beta = 12.5$ 。

选 $\omega_2 = \frac{\omega_c}{\mu} = 0.1 \text{ s}^{-1}$ (μ 取 8), 则 $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.008 \text{ s}^{-1}$, 所以迟后校正网络的传递函数为 $G_c(s) = \frac{10s+1}{125s+1}$, 其对数幅频特性见图 6-16 中双点划线。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{10(10s+1)}{s(s+1)(0.2s+1)(125s+1)}$$

其对数幅频特性见图 6-16 中实线所示。

验证:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 10\omega_c - \arctan \omega_c - \arctan 0.2\omega_c - \arctan 125\omega_c = 35.7^\circ > 35^\circ$$

符合要求。

讨论: 当系统对快速性、带宽等要求不高或无要求, 且未校正系统在低频段相角迟后量明显小于在穿越频率 ω_{c1} 处的相角迟后量时, 可考虑采用迟后校正。

本题中在求 γ' 时补偿量 ε 取为 7° , 也可取大或取小些, 一般 ε 取 $5^\circ \sim 15^\circ$ 范围。当 ε 取小些时, 式 $\omega_2 = \omega_c/\mu$ 中 μ 可取大些; 反之 ε 取大些时, μ 可取小些。一般 μ 取 $2 \sim 10$ 范围。

例 6.9 设某单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$ ，试求

满足下列条件的串联校正网络。

- (1) 速度误差系数 $k_v \geq 50$ ；
- (2) 相位裕量 $\gamma = 40^\circ \pm 3^\circ$ ；
- (3) 穿越频率 $\omega_c = 10 \pm 0.5 \text{ s}^{-1}$ 。

解 首先确定 K ：

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = K = 50$$

则未校正系统的开环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

绘制 $K=50$ 时未校正系统的对数幅频特性 $L_1(\omega)$ ，见图 6-17 中虚线所示。设未校正前穿越频率(剪切频率)为 ω_{c1} ，相位裕量为 γ_1 。

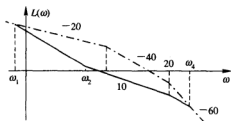


图 6-17

$$L_1(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{K}{\omega} & \omega < 10 \text{ s}^{-1} \\ 20 \lg \frac{K}{\omega \cdot 0.1\omega} & 10 \text{ s}^{-1} < \omega < 20 \text{ s}^{-1} \\ 20 \lg \frac{K}{\omega \cdot 0.1\omega \cdot 0.05\omega} & \omega > 20 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

令 $L_1(\omega_{c1}) = 0$ ，得 $\omega_{c1} = 18 \text{ s}^{-1}$ 。

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_{c1} - \arctan 0.05\omega_{c1} = -12^\circ$$

显然未校正系统不稳定，需要校正。

因 $\omega_{c1} = 18 \text{ s}^{-1}$ ，本题显然仅用超前校正是不能满足要求的；仅用滞后校正由方法一中的计算结论可知，也是不能满足要求的。必须用滞后—超前校正。

设滞后—超前校正网络的传递函数为 $G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$ ($a > 1, \beta > 1$)。

方法一 先设计滞后部分：

由 $\gamma = 40^\circ$ 要求，求出未校正系统所对应相角为 $40^\circ - 180^\circ$ 处的频率 ω' ，即由式 $180^\circ + \varphi(\omega') = \gamma$ 求出 ω 。

由 $180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega' - \arctan 0.05\omega' = 40^\circ$ ，解得 $\omega' = 5.5 \text{ s}^{-1}$ 。

该点增益 $L_1(\omega') = 20 \lg k + 20 \lg \frac{1}{\omega'} = 20 \lg \frac{K}{\omega} = 18 \text{ dB}$

由 $20 \lg \beta = +18$ 得 $\beta = 8$; 取 $\frac{1}{T_1} = \frac{\omega'}{10} = 0.55$, $T_1 = 1.82$, $\beta T_1 = 14.5$, 则迟后校正网络为

$$G_{c1}(s) = \frac{1.82s + 1}{14.5s + 1}$$

加入迟后校正后的系统开环传递函数为

$$G_1(s) = G_c(s)G_o(s)$$

其次设计超前部分:

按 $\omega_c = 10 \pm 0.5 \text{ s}^{-1}$ 的要求, 取滞后—超前校正后的穿越频率 $\omega_c = 10 \text{ s}^{-1}$, $G_1(j\omega)$ 在 ω 处为 10 s^{-1} , 相角为 $\varphi_1(\omega_c) = -165^\circ$ 。因此, 超前网络应提供的超前相角为

$$\varphi_m = 40 - [180^\circ - \varphi_1(\omega)] = 25^\circ$$

于是有 $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 2.46$, 令 φ_m 所对应 ω_m 为 $\omega_{c2} = \omega_c$, 即 $\omega_m = \omega_c = 10 \text{ s}^{-1}$, 则 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{2}T_2} = 10$, 解得 $T_2 = 0.064$, $\alpha T_2 = 0.157$ 。

所以超前网络为

$$G_{c2} = \frac{0.157s + 1}{0.064s + 1}$$

设

$$G_2(s) = G_1(s)G_{c2}(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_o(s)$$

由于 $\omega_{c2} = 10 \text{ s}^{-1}$ 与 $\frac{1}{0.1s + 1}$ 和 $0.157s + 1$ 环节转折频率相重或接近, 用渐近线法求 $\omega = \omega_{c1}$ 处 $G_2(j\omega)$ 的增益 $L_2(\omega_{c2})$ 误差较大, 因此用精度式求得

$$L_2(\omega_{c2}) = 20 \lg A(\omega_c) = -4 \text{ dB}$$

为了使 ω_{c2} 变为校正后的穿越频率, 则 $G_2(s)$ 的增益需增大; 设放大 ρ 倍 ($\rho > 1$)。

令 $20 \lg \rho + L_2(\omega_{c2}) = 0$ 得 $\rho = 1.58$, 则校正后增益 $K = 50 \times 1.58 = 79$ 。

所以校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{79(1.82s + 1)(0.157s + 1)}{(10.1s + 1)(0.05s + 1)(14.5s + 1)(0.0637s + 1)}$$

验证: $\gamma = 180^\circ - 165^\circ + (\arctan 1.82\omega_c - \arctan 14.5\omega_c) + 25^\circ = 37.3^\circ$, 满足要求。

讨论: 若要求 $\gamma = 40^\circ \pm 2^\circ$, 通过验证是不满足要求的, 此时可取 $\varphi = 26^\circ$ 或 27° , 即可满足要求, 相应的 ρ 也作微小变化。

方法二 先求超前网络:

$G(j\omega)$ 在 $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ 处相角 $\varphi_1(\omega) = -162^\circ$, 为使 $\gamma = 40^\circ$, 及考虑到迟后校正的影响, 取

$$\varphi_m = 40^\circ - (180^\circ - 162^\circ) + 5^\circ = 27^\circ$$

得

$$\alpha = \frac{1 + \sin 27^\circ}{1 - \sin 27^\circ} = 2.66$$

当 $\omega = 10$ 时, φ_m 处相应频率为 ω_m , 则

$$\omega_m = 10, \omega_m = \frac{1}{\sqrt{2}T_2} = 10, T_2 = 0.061, \alpha T_2 = 1.63$$

所以超前网络为

$$G_{c2}(s) = \frac{0.163s + 1}{0.06s + 1}$$

仅超前校正后系统的开环传递函数为

$$G_1(s) = G_o(s)G_{c2}(s) = \frac{50(0.163s+1)}{s(0.1s+1)(0.05s+1)(0.061s+1)}$$

其次设计迟后环节:

$\omega=10\text{ s}^{-1}$ 时, $G_1(j\omega)$ 的幅值为 14 dB(精确计算), 为了使 $\omega=10\text{ s}^{-1}$ 处就是校正后的穿越频率, 必须在此处 (10 s^{-1}) 使增益下降 14 dB。

故有 $20\lg\beta - 14 = 0$, 解得 $\beta = 5$ 。取 $\frac{1}{T} = \frac{1}{10}\omega_m = 1$, 得 $T_z = 1$, $\beta T_z = 5$ 。

所以迟后网络为

$$G_{c1}(s) = \frac{s+1}{5s+1}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_o(s)G_{c2}(s) = \frac{50(0.163s+1)(s+1)}{s(0.1s+1)(0.05s+1)(0.06s+1)(5s+1)}$$

验证: $\gamma = 180^\circ - 162^\circ + (\arctan\omega_c - \arctan 5\omega_c) + 27^\circ = 40.4^\circ$, 满足要求。

方法三 按期望特性画法设计:

首先根据系统性能要求画出期望频率特性。

低频段: 保留 $K=50$ 时 $G_o(j\omega)$ 的频率特性, 即低频段为斜率是 -20 dB/dec 的直线。

中频段: 过 $\omega=10^{-1}$ 画一条斜率为 -20 dB/dec 的直线。

由 $\gamma = 40^\circ$ 要求, 得 $M_r = \frac{1}{\sin\gamma} = 1.56$, 则中频段宽度为 $h = \frac{M_r+1}{M_r-1} = 4.57$ 。

中频段两个交换频率为: $\omega_2 \leq \frac{2}{h+1}\omega_c = 3.6\text{ s}^{-1}$, $\omega_3 \geq \frac{2h}{h+1}\omega_c = 16.4\text{ s}^{-1}$ 。

为留有余地, 取 $\omega_2 = 3\text{ s}^{-1}$ (注意 ω_2 对 γ 影响较明显, 而 ω_3 影响较弱, 一般取 $\omega_3 = 2\omega_c$)。

中频段与低频段用一条 -40 dB/dec 的直线连接, 设连接线转折频率为 ω_1 , 另一个就为 ω_2 。 ω_2 点期望特性增益为 $20\lg\frac{10}{3}$, ω_2 点原系统增益为

$$20\lg 50 - 20\lg\frac{3}{1} = 20\lg\frac{50}{3}$$

则 $20\lg\beta = 20\lg 50 - 20\lg\frac{10}{3}$

解得 $\beta = 5$, 所以 $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.6\text{ s}^{-1}$ 。

高频段: 维持原系统高频特性, 即为 -60 dB/dec 的斜线, 为了使校正装置不至于复杂, 取 $\omega_3 = 20\text{ s}^{-1}$, 高频段用一条 -40 dB/dec 的斜线连接, 设与 -60 dB/dec 线交点频率为 ω_4 。

期望特性在 ω_4 点的增益为

$$20\lg\frac{20}{10} - 40\lg\frac{\omega_4}{20} = -20\lg\frac{\omega_4}{200}$$

未校正系统在 ω_4 点增益为

$$-40 \lg \frac{20}{18} - 60 \lg \frac{\omega_4}{20} = -20 \frac{\omega_4^2}{18^2 \times 20}$$

令两式相等, 得 $\omega_4 = 32.4 \text{ s}^{-1}$ 。

则期望特性所对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{50 \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_3} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_4} + 1 \right)}$$

将 $20 \lg |G_o(j\omega)|$ 减去 $20 \lg |G(j\omega)|$, 就得到串联校正装置的对数幅频特性, 如图 6-17 所示。则

$$G_c(j\omega) = \frac{(s/\omega_2 + 1)(s/10 + 1)}{(s/\omega_1 + 1)(s/\omega_4 + 1)} = \frac{(0.33s + 1)(0.1s + 1)}{(1.67s + 1)(0.03s + 1)}$$

所以

$$G(s) = \frac{50(0.33s + 1)}{s(1.67s + 1)(0.05s + 1)(0.03s + 1)}$$

验证:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.33\omega_c - \arctan 1.67\omega_c - \arctan 0.05\omega_c - \arctan 0.03\omega_c = 33.3^\circ$$

不满足要求。

可将上述校正过程中的 ω_2 取为 1.5 s^{-1} 。得 $\beta = 6$, $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.25$ 。

校正网络为

$$G_c(s) = \frac{(0.67s + 1)(0.1s + 1)}{(4s + 1)(0.03s + 1)}$$

重新计算得

$$G(s) = \frac{50(0.67s + 1)}{s(4s + 1)(0.05s + 1)(0.03s + 1)}$$

此时 $\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.67\omega_c - \arctan 4\omega_c - \arctan 0.05\omega_c - \arctan 0.03\omega_c = 39.67^\circ$, 满足要求。

讨论: 从本题的三种解法可以看出, 当系统性能要求较高时, 需用迟后—超前校正, 迟后和超前部分可分别单独处理, 但先求超前部分, 一般会较为简便些。总的来说按期望值特性校正较为容易, 得出的校正装置也不会过于复杂, 但需要熟悉期望特性三段的设计要求。

例 6.10 已知系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(1 + 0.5s)(1 + 0.1s)}$, 试设计 PID 校正装置, 使系统 $K_v \geq 10$, $\gamma(\omega_c) \geq 50^\circ$ 且 $\omega_c \geq 4 \text{ rad/s}$ 。

解 由 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = K$ 得 $K = 10$, 作未校正系统 $G_o(j\omega)$ 的伯德图如图 6-18 中 L_o 所示。

由 $20 \lg K - 20 \lg \frac{2}{1} - 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{2} = 0$, 即 $20 \lg \frac{K}{0.5\omega_c \times \omega_c} = 0$, 得 $\omega_{c1} = 4.47 \text{ s}^{-1}$

$$r_1(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c \approx 0^\circ$$

设 PID 校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\tau_1 s} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s/\omega_1}$$

其对应的伯德图如图 6-18 中 L_c 所示。

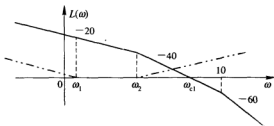


图 6-18

则校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{K\omega_1 \left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)}{s^2(0.1s + 1)(0.5s + 1)}$$

由于校正后系统 $G(s)$ 为 II 型系统, 此时 $K_v \rightarrow \infty$ 是满足要求的; 系统开环增益 $K_1 = K\omega_1$ 可任选, 可由其它条件而定。

初选 $\omega_c = 4$ 。为降低系统阶次, 选 $\omega_2 = 2$, 并选 $\omega_1 = \frac{1}{8}\omega_c = 0.5$, 此时

$$G(s) = \frac{K_1 \left(\frac{s}{0.5} + 1\right) \left(\frac{s}{2} + 1\right)}{s^2[0.1s + 1(0.5s + 1)]} = \frac{K_1(2s + 1)}{s^2(0.1s + 1)}$$

要使校正后穿越频率 $\omega_c = 4 \text{ s}^{-1}$, 必须 $20 \lg \frac{K_1 \frac{\omega_2}{\omega_c}}{\omega_c} = 0$, 解得 $K_1 = 2$ 。

所以校正后系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{2(1 + 2s)}{s^2(1 + 0.1s)}$ 。

验证: $\gamma(\omega_c) = 180^\circ - 180^\circ + \arctan 2\omega_c - \arctan 0.1\omega_c = 61.1^\circ$, 满足要求。

例 6.11 某系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{100}{s(s+1)(0.003s+1)}$, 试确定串联校正装置, 使校正后系统满足以下性能: 速度误差系数 $k_v = 1000$, 最大超调量 $\delta\% \leq 30\%$, 调节时间 $t_s = 0.25 \text{ s}$ 。

解 首先确定 K 。由 $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = K$, 得 $K = 1000$ 。

画出 $K = 1000$ 时未校正系统的伯德图如图 6-19 中虚线所示。

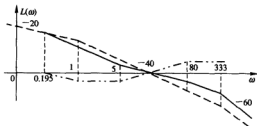


图 6-19

由图 6-19 可得 $20 \lg K - 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{1} = 0$, 即 $20 \lg \frac{K}{\omega_{c1} \omega_{c1}} = 0$, 解得 $\omega_{c1} \approx 32 \text{ s}^{-1}$

$$\gamma_1 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.003 \omega_c = -2^\circ$$

故未校正系统不稳定, 需进行校正。

由经验公式: $\delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$ 得 $M_r = 1 + \frac{\delta\% - 0.16}{0.4} = 1.35$ 。

由 $t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]$ 得 $\omega_c = 36 \text{ s}^{-1}$ 。

中频宽为 $h = \frac{M_r + 1}{M_r - 1} = 6.7$, 为留有余地, 取 $\omega_c = 40 \text{ s}^{-1}$, $h = 8$, 则中频段两交接频

率为:

$$\omega_2 = \frac{2}{h+1} \omega_c = 8.9 \text{ s}^{-1} \quad \omega_3 = \frac{2h}{h+1} \omega_c = 71 \text{ s}^{-1}$$

则期望频率特性设计如下:

① 中频段为过 $\omega_0 = 40 \text{ s}^{-1}$ 的斜率为 -20 dB/dec 的斜线, 转折点为 ω_2 和 ω_3 。

② 低频段为斜率为 -20 dB/dec 的斜线(原未校正系统部分), 过中频段 ω_2 点用斜率为 -40 dB/dec 的直线将中低频段连接, 连接线与低频段交点为 ω_1 。

由 $20 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} + 40 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 40 \lg \frac{\omega_{c1}}{1} + 20 \lg \frac{1}{\omega_1}$ 得 $\omega_1 = 0.35 \text{ s}^{-1}$ 。

③ 高频段为过中频段 ω_3 点作斜率为 -40 dB/dec 的直线至 $\omega_4 = \frac{1}{0.003} = 333 \text{ s}^{-1}$, 在 $\omega > \omega_4$ 时, 渐近线斜率为 -60 dB/dec 。

期望特性见图 6-19 中实线所示。

用未校正特性与期望特性相减得校正装置的特性 $G_c(s) = \frac{(s+1)(0.11s+1)}{(2.86s+1)(0.114s+1)}$,

其对应的伯德图如图 6-19 中点划线所示。

验证:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.003 \omega_c - \arctan 2.86 \omega_c - \arctan 0.014 \omega_c \\ &\quad + \arctan \omega_c + \arctan 0.11 \omega_c \\ &= 41.6^\circ \end{aligned}$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.5 > 1.35$$

重新调整以上有关数据: 将 ω_2 调小为 55 s^{-1} , $\omega_3 = 2\omega_c = 80 \text{ s}^{-1}$, $\omega_1 = 0.195 \text{ s}^{-1}$, 则

$$G(s) = \frac{(s+1)\left(\frac{1}{5}s+1\right)}{(5.12s+1)(0.0123s+1)}$$

验证:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 5.12 \omega_c - \arctan 0.0123 \omega_c \\ &\quad + \arctan \frac{1}{5} \omega_c + \arctan \omega_c \\ &= 50.1^\circ \end{aligned}$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.3 < 1.35$$

$$\delta\% = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 28\% < 30\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] = 0.21 \text{ s} < 0.25 \text{ s}$$

满足要求, 则校正后开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10\,000(0.2s + 1)}{s(5.12s + 1)(0.0123s + 1)(0.003s + 1)}$$

例 6.12 设复合控制系统如图 6-20(a) 所示, 图中 $G_n(s)$ 为顺馈装置传递函数 $G_c(s) = K_1 s$ 。为测速发电机及分压器的传递函数, $G_1(s) = K_1$, $G_2(s) = 1/s^2$ 。试确定 K_1 , $G_n(s)$ 和 $G_c(s)$ 使系统输出量完全不受扰动 $n(t)$ 的影响, 且单位阶响应超调量 $\delta\% = 25\%$, 峰值时间 $t_p = 2 \text{ s}$ 。

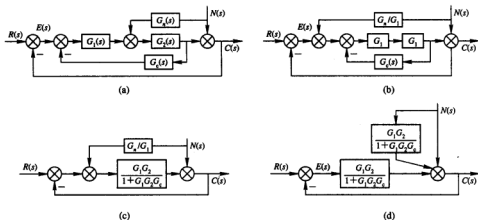


图 6-20

解 首先进行结构图化简, 得等效结构图 6-20(d)。

为了使系统输出完全不受扰动影响, 就是在 $R(s) = 0$ 时 $N(s)$ 产生的输出 $C(s) = 0$

由 $N(s) + N(s) \frac{G_2 G_n}{1 + G_1 G_2 G_c} = 0$, 得

$$\frac{G_2 G_n}{1 + G_1 G_2 G_c} = -1 \quad \text{i)}$$

因为 $G_1(s) = K_1$, $G_2(s) = 1/s^2$, $G_c(s) = K_1 s$, 代入 i) 式得:

$$G_n(s) = \frac{1 + G_1 G_2 G_c}{G_2} = -s(s + K_1 K_1)$$

系统仅在 $R(s)$ 作用下的开环传递函数为:

$$G_r(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_c} = \frac{K_1}{s(s + K_1 K_1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{K_1}, \quad \zeta = \frac{K_1 K_1}{2\omega_n}$$

$$\text{由 } \delta\% = e^{-\kappa\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25 \quad \text{得 } \zeta = \frac{\ln 4}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 4}} = 0.404$$

$$\text{由 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2 \quad \text{得 } \omega_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.717$$

$$\text{所以 } K_1 = \omega_n^2 = 2.948, \quad K_1 K_t = 2\omega_n \zeta = 1.387$$

$$\text{故 } G_c(s) = K_t s = 0.47 s, \quad G_n(s) = -s(s + K_1 K_t) = -s(s + 1.387)$$

例 6.13 某系统结构如图 6-21(a) 所示, 其中 $G_1(s) = \frac{238}{0.36s+1}$, $G_2(s) = \frac{228}{0.36s+1}$, $G_3(s) = \frac{0.0208}{s}$, 试设计反馈校正部分, 使系统性能指标为 $\delta\% \leq 25\%$, $t_s \leq 0.8 s$ 。

解 (1) 未校正系统的开环传递函数为

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{1130}{s(0.06s+1)(0.36s+1)}$$

首先绘制 $G_o(s)$ 的伯德图 $L_o(\omega)$, 如图 6-21(b) 所示。两个转折频率为

$$\omega_1 = \frac{1}{0.36} = 2.78 s^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{0.06} = 16.7 s^{-1}$$

$\omega = 1$ 时, 幅值为 $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 1130 = 61 \text{ dB}$ 。

(2) 其次绘制期望频率特性。

由题目要求 $\delta\% \leq 25\%$, 按经验公式有

$$M_r = 1 + \frac{\zeta - 0.16}{0.4} = 1.225$$

即要求 $M_r \leq 1.225$ 。

由 $t_s \leq 0.8(s)$, 按经验公式有 $\omega_c = \frac{\pi}{t_s} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] = 9.6 s^{-1}$,

即要求 $\omega_c \geq 9.6 s^{-1}$ 。

中频宽 $h \geq \frac{M_r + 1}{M_r - 1} = 9.9$, 取 $\omega_c = 10 s^{-1}$, $h = 15$ 。

中频段两转折频率为:

$$\omega_3 \leq \frac{2}{h+1} \omega_c = 1.25, \quad \omega_4 \geq \frac{2h}{h+1} \omega_c = 18.75$$

① 中频段, 过 $\omega_c = 10 s^{-1}$ 点(零分贝线上)做 -20 dB/dec 斜线。为了简化校正装置, 取中频段高端转折频率 ω_4 等于 ω_2 , 即 $\omega_4 = 16.7 s^{-1}$ (D 点), 低端转折频率为 $\omega_3 < \frac{16.7}{15} = 1.1 s^{-1}$ (C 点)。因为 $\omega_4 = 16.7 < 18.75$, 故可将 ω_3 取小些, 为 $0.4 s^{-1}$ 。

② 低频段, 保留原 -20 dB/dec 的斜线, 中低频段需连接线连接。过 $\omega_3 = 0.4 s^{-1}$ 点作斜线 -40 dB/dec , 与低频段 -20 dB/dec 的交点频率为 ω_5 (B 点)。根据 $\omega = \omega_5$ 时期望特性幅值 $L(\omega)$ 等于未校正特性幅值。

$$20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_3} + 40 \lg \frac{\omega_2}{\omega_5} = 20 \lg K + 20 \lg \frac{1}{\omega_5}$$

得 $\omega_5 = 0.003 s^{-1}$ 。

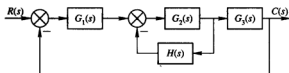
③ 高频段, 保留原 -60 dB/dec 的斜线; 过 $\omega_4 = 16.7 \text{ s}^{-1}$ 作 -40 dB/dec 斜线与高频 -60 dB/dec 斜线相交, 交点频率为 $\omega_5 (E \text{ 点})$ 。

由

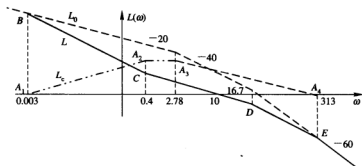
$$20 \lg \frac{\omega_4}{\omega_c} + 40 \lg \frac{\omega_5}{\omega_4} = -20 \lg \frac{K}{\omega_4 \cdot 0.06\omega_5 \cdot 0.36\omega_5}$$

得 $\omega_5 = 313 \text{ s}^{-1}$ 。

期望特性 $L(\omega)$ 见图 6-21(b)。



(a)



(b)

图 6-21

(3) 确定 $H(s)$ 。

综上所述, 期望特性 $L(\omega)$ 的转折频率依次为 ω_5 , ω_3 , ω_4 和 ω_6 。用 $L_0(\omega) - L(\omega)$ 得到并联校正装置作用的频段应为 $0.003 \text{ s}^{-1} < \omega < 313 \text{ s}^{-1}$, 即在该频段时 $|G_2(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$; 在 $\omega < 0.003 \text{ s}^{-1}$ 及 $\omega > 313 \text{ s}^{-1}$ 频段时反馈校正装置不起作用, 即此时 $|G_2(j\omega)H(j\omega)| \ll 1$; 分别把 A_2A_1 , A_3A_4 延长, 从而得到局部反馈的开环传递函数为

$$G_2(s)H(s) = \frac{K_4 s}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

式中: $K_4 = \frac{1}{0.003} = 306$, $\tau_1 = \frac{1}{0.4} = 2.5$, $\tau_2 = \frac{1}{2.78} = 0.36$

则 $H(s) = \frac{G_2(s)H(s)}{G_2(s)} = \frac{306s}{(2.5s+1)(0.36s+1)} \cdot \frac{228s}{0.36s+1} = \frac{1.34}{2.5s+1}$

(4) 检验局部反馈部分的稳定性, 主要求取 $\omega = \omega_6$ 处 $G_2(j\omega)H(j\omega)$ 相角量 (因为 $\angle G_2 H_2$ 相角迟后是逐渐加大的)。

$$\gamma(\omega_6) = 180^\circ + 90^\circ - \arctan 2.5\omega_6 - \arctan 0.36\omega_6 = 90.5^\circ$$

另外 $\gamma(\omega)$ 总是大于零的, 故局部反馈部分是稳定的。又求局部反馈在 $\omega = \omega_c$ 处的幅值为

$$20 \lg \left| \frac{306}{0.4 \times \omega_c \times 2.78 \times \omega_c} \right| = 8.79 \text{ dB}$$

基本满足在 $0.003 \text{ s}^{-1} < \omega < 313 \text{ s}^{-1}$ 频段, $|G_z(j\omega)H(j\omega)| \gg 1$ 要求具有一定的近似精度。

由于近似条件都能较好地满足, 故可用期望特性来验算。

期望频率特性对应的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{1130 \left(\frac{1}{0.4}s + 1 \right)}{s \left(\frac{1}{0.003}s + 1 \right) \left(\frac{s}{16.7} + 1 \right) \left(\frac{s}{313} + 1 \right)}$$

$$\text{验证: } \gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{0.003} + \arctan \frac{\omega_c}{0.4} - \arctan \frac{\omega_c}{16.7} - \arctan \frac{\omega_c}{313} = 55^\circ$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma} = 1.22^\circ < 1.225$$

故满足要求。

例 6.14 * 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = K/s^2$, 要求设计一串联校正网络, 使系统满足: ① 阶跃输入时超调量 $\delta\% \leq 50\%$; ② 调节时间 $t_s \leq 4 \text{ s}$ 。

解 本题要求的性能是时域指标, 当然可以将时域指标化为频域指标 γ 和 ω_c 等, 然后用频域方法进行校正。在此我们用时域校正方法——根轨迹校正法。

根轨迹法的第一步基本都是确定期望主导极点的位置。

因为 $\delta\% \leq 50\%$, 得 $\zeta > 0.216$; 又 $t_s \leq 4 \text{ s}$, 得 $\zeta\omega_n > 1$ 。

考虑到非主导极点的影响, 将 ζ 取大些, 令 $\zeta = 0.45$, 则希望的主导极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm j2$$

方法一: 图解法。

显然 $s_{1,2}$ 在未校正系统 $G_o(s) = K/s^2$ 的根轨迹左侧, 需用串联超前校正。因原系统在原点有两个极点, 其在 s_1 处的相角为 $-117^\circ \times 2 = -234^\circ$, 所以超前装置在 s_1 处要产生超前角, 为

$$\varphi_a = -180^\circ - (-234^\circ) = 54^\circ$$

下面确定超前网络的零点。在图 6-22

中, 从 P 点 (s_1 点) 引一条水平线 PA , 再将 P 与原点 O 相连得线段 PO , 作 $\angle OPA$ 的平分线 PB , 沿 PB 的左右两侧各依 $\frac{\varphi_a}{2} = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$ 作

图得 $Z_c = -1.15$, $P_c = -4.3$, 则 $\alpha = \frac{P_c}{Z_c} = 3.74$ 。

$$G_c(s) = \frac{s+1.15}{s+4.3} = \frac{1}{3.74} \cdot \frac{1+0.87s}{1+0.234s}$$

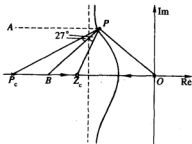


图 6-22

根轨迹增益为

$$K = \frac{|s_1 - 0| |s_1 - 0| |s_1 - P_c|}{|s - Z_c|} = 9.33$$

所以校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{9.33(s+1.15)}{s^2(s+1+j2)} = \frac{2.5(1+0.87s)}{s^2(1+0.234s)}$$

其闭环极点为 $s_{1,2} = 1 \pm j2$, $s_3 = -2.3$ 。

校正后根轨迹如图 6-22 所示。

验证：闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{9.33(s+1.15)}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2.3)}$$

根据估算公式得 $\delta = 45\%$, $t_s = 3.63$, 满足要求。

讨论：根轨迹超前校正方法中， φ_m 的求取方法较明确，也是首先要确定的；而 Z_c 和 P_c 的求取没有一定的方法，本题中给出一种较常用的方法——平分线法。 Z_c 和 P_c 的确定是多种多样的，要根据原系统的零极点和不影响主导极点的主导地位灵活确定 Z_c 和 P_c 。如本题若用上述对角线方法确定出的 Z_c 和 P_c 不满足要求，可将 $|Z_c|$ 适当提高，但要保证 $\angle P_c Z_c = 54^\circ$ ，此时 $|S_3|$ 也将明显提高，性能将会改善；反之 $|Z_c|$ 减少，性能将会下降。

方法二：解析法。

设超前校正装置为 $G_c(s) = \frac{s-Z_c}{s-P_c}$ ，则

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{K(s-Z_c)}{s^2(s-P_c)}$$

闭环特征方程为

$$f(s) = s^3 - P_c s^2 + Ks - KZ_c = 0$$

因为期望极点 $s_{1,2} = -1 \pm j2$ ，设另一极点为 s_3 ，则期望特征方程为

$$f^*(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = s^3 + (s_2-s_3)s^2 + (5-2s_3)s - 5s_3 = 0$$

令 $f(s) = f^*(s)$ ，得

$$\begin{cases} -P_c = 2 - s_3 \\ K = 5 - 2s_3 \\ -KZ_c = -5s_3 \end{cases}$$

令 $s_3 = -5(s_3$ 要远离 $s_{1,2}$)，得 $P_c = -7$, $K = 15$, $Z_c = -5/3$ 。

则校正后系统的开环传递函数为

$$G_o(s)G_c(s) = \frac{15(s+5/3)}{s^2(s+7)}$$

讨论：解析法虽然简捷，但没有作图法直观形象，概念清晰；尤其是原系统阶次较高时，运算量也是很大的，并且约束条件多时，解析法很难求解。

例 6.15* 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$ ，如果要求系统在阶跃输入下的超调量 $\delta\% \leq 20\%$ ，调节时间 $t_s \leq 15$ s，而在单位斜坡输入时稳态误差 $e_{ss} \leq 15\%$ ，试设计校正装置。

解 由 $\delta\% \leq 20\%$ ，得 $\zeta \geq 0.45$ ($\zeta\% \leq e^{-\pi\sqrt{1-\zeta^2}}$)

由 $t_s \leq 15$ s，得 $\zeta\omega_n \geq \frac{4}{15} = 0.27$

取 $\zeta=0.45$, 原系统根轨迹见图 6-23, 对应等阻尼线夹角 $\theta=63^\circ$, 作辅助线(虚线)与根轨迹交点为 $s_{1,2}=-0.4 \pm j0.8$ 。此时所对应的

$$K' = |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 5| \\ = |-0.4 + j0.8| |0.6 + j0.8| |4.6 + j0.8| = 4.2$$

第三个极点为 $s_3 = -5.2$, 远离原点 $s_{1,2}$, 所以系统动态性能主要服从于 $s_{1,2}$ ($s_{1,2}$ 对应的 $\zeta = 0.45$, $\omega_n = 0.89$, $\zeta \omega_n = 0.4$, 满足 $\delta\%$ 和 t_s 的要求)。

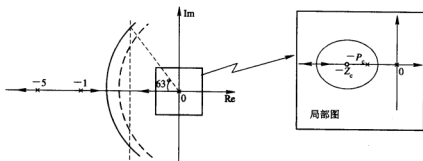


图 6-23

速度误差系数为

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) = \frac{K'}{5} = \frac{4.2}{5} = 0.84$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{0.84} = 120\% > 15\%$$

由此可见, 在 $K' = 4.2$ 时, 原系统满足动态性能指标, 但不满足稳态指标。显然仅通过增大放大倍数是不能解决问题的, 在该情况即动态性能满足而稳态指标不满足时, 可用迟后校正。

通过在原点附近增添一对开环偶极子, 使放大倍数提高, 而原期望的极点 $s_{1,2}$ 仅在其附近做很小的变化, 可认为其基本不变。

$$\text{设} \quad G_c(s) = \frac{s + Z_c}{s + P_c} \quad (Z_c > P_c)$$

因为 $G_o(s)$ 所对应的 $k_v = 0.84$, 希望的 $k_v^* = \frac{1}{0.15} = 6.667$, 所以校正后增益需提高 β 倍, $\beta \geq \frac{k_v^*}{k_v} = 7.93$ 。

$$\text{令} \quad \frac{Z_c}{P_c} = 10 (> 7.93), \quad Z_c = 0.08, \quad \text{则} \quad P_c = 0.008.$$

则校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{s + 0.08}{s + 0.008} \cdot \frac{K''}{s(s+1)(s+5)}$$

其相应的根轨迹见图 6-23 中虚线, 等阻尼线 $\zeta = 0.45$ 与虚线的交点为 $s'_{1,2} = -0.37 \pm j0.75$ (满足 $\delta\%$ 和 t_s 的要求)。

$s'_{1,2}$ 所对应的根轨迹增益为

$$K'' = \frac{|s_1 + 0.008| |s_1| |s_1 + 1| |s_1 + 5|}{|s_1 + 0.08|} = 4$$

校正后 $k'_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = 8$, $e'_{ss} = \frac{1}{k'_v} = 12.5\% \leq 15\%$, 满足要求。

其余两个闭环极点为 $s'_3 = -5.18$, $s'_4 = -0.088$, 显然 $s_{1,2}'$ 为主导极点 (s'_3 远离虚轴, s'_4 与 -0.08 零点形成偶极子, 它对系统的影响可忽略)。

由 $s_{1,2}' = -0.37 \pm j0.75$ 有 $\zeta = 0.45$, $\omega_n' = 0.85$, 故

$$\delta\% = e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 20\% \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 10.5 \text{ s} < 15 \text{ s}$$

讨论: 迟后校正

$$G_c(s) = \frac{s + Z_c}{s + P_c} = K_c \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad \left(\text{其中 } K_c = \frac{Z_c}{P_c} > 1, T_1 = \frac{1}{Z_c}, T_2 = \frac{1}{P_c} \right)$$

该校正装置可由迟后网络附加放大器增益来实现。 β 的确定可根据稳态指标要求而定, 而 Z_c 的位置一般取靠近原点。迟后校正要保证 $\angle(s_1 + Z_c) - \angle(s + P_c) \approx 0$, $|G_o(s_1)| \approx 1$ 。

例 6.16* 设单位反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$, 试用根轨迹法设计一串联校正装置, 使系统闭环主导极点的阻尼比 $\zeta = 0.5$, 自然频率 $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$, 静态速度误差系统 $k_v = 50 \text{ rad/s}$ 。

解 由于对校正后系统既有稳态性能要求, 又要提高动态性能, 所以选用迟后—超前校正。首先确定期望闭环主导极点。由 ζ 及 ω_n 的要求, 选主导极点为:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -2.5 \pm j4.33$$

$$\angle G_o(s_1) = -\angle s_1 - \angle(s_1 + 0.5) = -235^\circ$$

则校正网络超前部分需产生的相角超前量 $\varphi_a = -180^\circ - (-235^\circ) = 55^\circ$ 。

方法一: 校正网络传递函数为

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + 1/T_a)(s + T_b)}{(s + 1/aT_a)(s + a/T_b)}$$

校正后系统静态速度误差系数为

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4K_c}{s + 0.5} = 50$$

故得 $K_c = 6.25$ 。

对于校正网络迟后部分, 一般将 T 选得足够大, 使

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_a}{s_1 + 1/aT_a} \right| \approx 1, \quad s_1 = -2.5 + j4.33$$

按幅值条件有

$$|G(s_1)G_c(s_1)| = \left| \frac{s_1 + 1/T_b}{s_1 + a/T_b} \right| \cdot \left| \frac{s_1 + 1/T_a}{s_1 + 1/aT_a} \right| \cdot \left| \frac{4K_c}{s_1(s_1 + 0.5)} \right| = 1$$

由此得 $\left| \frac{s_1 + 1/T_b}{s_1 + a/T_b} \right| = \frac{4.77}{5} = 0.954$, 而 $\angle \frac{s_1 + 1/T_b}{s_1 + a/T_b} = 55^\circ$, 见图 6-24(a), 设 P 点

为 $s_1 = -2.5 + j4.33$, A 点为 $-\frac{1}{T_b}$, B 点为 $-\frac{a}{T_b}$, 则有 $\angle APB = 55^\circ$, $\frac{PA}{PB} = 0.954$ 。

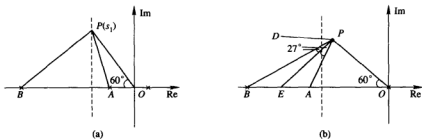


图 6-24

作图可得 $\overline{AO} = 0.5$, $\overline{BO} = 5$, 因此 $-\frac{1}{T_b} = -0.5$, 即 $T_b = 2$; 又 $-\frac{a}{T_b} = -5$, 得 $a = 10$ 。

为了满足

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_a}{s_1 + 1/10T_a} \right| \approx 1, \quad 0^\circ < \angle \frac{s_1 + 1/T_a}{s_1 + 1/10T_a} < 3^\circ$$

且使 $10T_a$ 不太大, 故选 $T_a = 10$ 。

所以校正网络为

$$G_c(s) = \frac{6.25(s+0.1)(s+0.5)}{(s+0.01)(s+5)}$$

校正后开环传递函数为

$$G_c(s)G_o(s) = \frac{25(s+0.1)}{s(s+0.01)(s+5)}$$

验证: 校正后 $s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$, 另两极点为 $s_3 = -0.102$, s_4 与闭环零点 -0.1 形成偶极子, 不影响主导极点 $s_{1,2}$ 的地位, 故 ζ 与 ω_n 均满足要求。校正前后的根轨迹见图 6-25。

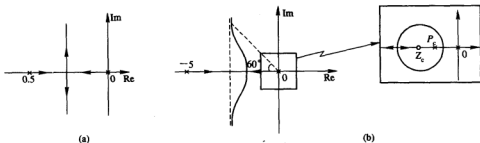


图 6-25

方法二: 也可用例题 6.14 的方法, 即在 P 点作一水平线 \overline{PD} , 作 $\angle OPD$ 的平分线 \overline{PE} , 沿 PE 的左右两侧各依 $\frac{55^\circ}{2} = 27.5^\circ$ 角作两条射线, 其与负实轴交点即为超前网络的零极点, 见图 6-24(b)。

$$\text{此时} \quad \overline{OA} = \frac{\overline{PO} \cdot \sin(60^\circ - 17.5^\circ)}{\sin[180^\circ - 60^\circ - (60^\circ - 27.5^\circ)]} = 2.69$$

$$\overline{OB} = \frac{\overline{PO} \cdot \sin(60^\circ + 17.5^\circ)}{\sin[180^\circ - 60^\circ - (60^\circ + 27.5^\circ)]} = 9.3$$

$$\text{设} \quad G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T_a}{s + 1/\beta T_a} \cdot \frac{s + 1/T_b}{s + a/T_b}$$

有 $-\frac{1}{T_b} = -2.69$, $-\frac{a}{T_b} = 9.3$, 由此得 $T_b = 0.37$, $a = 3.45$ 。

$$\text{根据} \quad K = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta K_c}{\alpha} \frac{4}{s + 0.5} = 50$$

$$\text{得} \quad \beta K_c = 6.25\alpha = 21.56$$

按迟后校正方法取得 $\beta = 10$, $\frac{1}{T_a} = 0.1$, 得 $T_a = 10$, $K_c = 2.2$ 。

$$\text{所以} \quad G_c(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \cdot \frac{s + 2.69}{s + 9.3}$$

$$\text{则有} \quad G_c(s)G_o(s) = \frac{8.8(s + 0.1)(s + 2.69)}{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 9.3)}$$

此时实轴上 $[-2.69, -0.5]$ 为其中一条根轨迹, 即有一闭环极点在此区间, 影响到极点 $s_{1,2}$ 起主导的地位, 因此 A 点的确定要尽可能接近 -0.5 , 不可盲目套用例 6.14 的方法。当取 A 点为 -0.5 时, 其后与方法一相同。

讨论: 对于超前网络, 若机械地套用例 6.14 的方法, 有时会影响极点 $s_{1,2}$ 起主导作用。超前校正的 A 点取法是多种多样的, 只要所取 A 点以及相应 B 点后, 能保证 $s_{1,2}$ 起主导作用即可。

例 6.17 已知某系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{1}{s(s+10)}$, 且 (1) 对斜坡输入稳态误差为零, (2) 主导极点的阻尼比 $\zeta = 0.45$, $\omega_n = 6$, 试设计串联校正装置。

解 为满足 (1) 的条件, 开环传递函数必须是 II 型, 因 $G_o(s)$ 是 I 型, 校正装置必具有 $1/s$ 因子, 考虑到闭环稳定性, 应选具有零点的校正装置, 即可用比例-积分型校正网络

$$G_c(s) = K \left(\frac{a}{s} + 1 \right) = \frac{K(s+a)}{s}$$

这时开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+10)}$$

因为 $\zeta = 0.45$, $\omega_n = 6$, 所以期望主导极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -2.7 \pm j5.4$$

系统闭环特征方程为

$$s^2(s+10) + K(s+a) = s^3 + 10s^2 + Ks + Ka = 0$$

设与 $s_{1,2}$ 相对应的另一闭环极点为 $-s_3$, 则有

$$(s-s_1)(s-s_2)(s+s_3) = s^3 + (5.4+s_3)s^2 + (36.45+5.4s_3)s + 36.45s_3 = 0$$

$$\text{比较上两式有 } \begin{cases} 5.4 + s_3 = 10 \\ 36.45 + 5.4s_3 = K \\ 36.45s_3 = Ka \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} s_3 = +4.6 \\ K = 61.29 \\ a = 273 \end{cases}$$

$$\varphi_a = -180^\circ - (-120^\circ - 90^\circ - 30^\circ) = 60^\circ$$

故

$$G_c(s) = 61.29 \left(\frac{2.73}{s} + 1 \right)$$

例 6.18 某系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$ ，试用迟后—超前校正使校正后系统满足下列指标： $\zeta = 0.5$ ， $\omega_n = 2$ ， $k_v \geq 5$ 。

解 根据系统性能指标，要求闭环主导极点位置为 $s_{1,2} = -1 \pm j1.73$

(1) 设计超前校正部分。

超前网络应补偿的相角为

$$\varphi_a = -180^\circ - (-120^\circ - 90^\circ - 30^\circ) = 60^\circ$$

为简单起见，也为不影响极点 $s_{1,2}$ 的主导作用，置补偿零点于 $Z_b = -1$ ，以便抵消一个开环极点，与连接 -1 到 s_1 的直线构成 60° 画出一直线，由此确定补偿极点为 $P_a = -4$ 。见图 6-26。

加入超前补偿后系统开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K_1}{s(s+4)^2}$$

在 s_1 处的增益为

$$K_1 = |s_1| |s_1 + 4|^2 = 24$$

对应之

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = 1.5$$

(2) 设计滞后校正部分。

要求滞后校正部分提供的放大倍数为 $5/1.5 \approx 3.3$ 。令滞后校正部分的极点、零点分别为 $P_a = -0.025$ ， $Z_a = -0.1$ ，它可使系统开环放大系数增加 4 倍，从而满足稳态性能要求。

这样，迟后—超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+4)(s+0.025)}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+0.1)}{s(s+4)^2(s+0.025)}$$

在点 $s_1 = -1 + j1.73$ 处

$$K = \left| \frac{s(s+0.025)(s+4)^2}{s+0.1} \right|_{s_1} = 24.4$$

相应为

$$k_v = \frac{K \times 0.1}{0.025 \times 16} = 6.1 > 5$$

由于滞后部分的加入，使实际系统的根轨迹稍有偏差，见图 6-26 中实线。

由图 6-26 可计算在点 s'_1 处的增益为 $K = 23.7$ 。

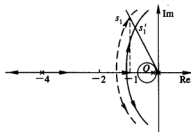


图 6-26

因此, 加入迟后一超前校正网络后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{23.7(s+0.1)}{s(s+0.025)(s+4^2)}$$

例 6.19 已知系统开环传递函数为 $G_0(s) = \frac{K}{s(0.9s+1)(0.007s+1)}$, 设对系统的性能指标要求为 $k_v \geq 500/s$, $t_s \leq 0.25 s$, $\zeta\% \leq 30\%$, 试设计串联校正传递函数 $G_c(s)$ 。

解 首先将时域指标化为频域指标。

$$M_r = \frac{\delta - 0.16}{0.4} + 1 = 1.35, \omega_c = (4 \sim 9) \frac{1}{t_s} = (16 \sim 36) \text{ rad/s}$$

选 $\omega_c = 30 \text{ rad/s}$, $h = \frac{M_r + 1}{M_r - 1} = 6.7$, 取 $h = 7$ 。

$$\frac{\omega'_3}{\omega_c} = \frac{2h}{h+1} = 1.75, \omega'_3 = 1.75\omega_c = 53 \text{ rad/s}, T'_3 = \frac{1}{\omega'_3} = 0.019 s$$

$$\omega_2 = \frac{\omega'_3}{h} = 7.6 \text{ rad/s}, T_2 = 1/\omega_2 = 0.13 s$$

因系统的固有特性在高频段有一个时间常数 $T_f = 0.007 s$, 所以修改 ω'_3 到 ω_3 使得 $T_3 = 1/\omega_3 = T'_3 - T_f = 0.012 s$ (说明: 常将高频段两个时间常数 T_f 和 T_3 等效为一个 $T'_3 = T_3 + T_f$), 即

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = 83 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 \omega_c}{k_v} = 0.46 \text{ rad/s}, \quad \left(\text{由 } 20 \lg k_v + 20 \lg \frac{1}{\omega_1} - 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_2} - 40 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0 \text{ 得} \right)$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 2.2 s$$

从而可画出期望的开环特性如图 6-27 中 I, 相应的传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{500(0.13s+1)}{s(2.2s+1)(0.012s+1)(0.007s+1)}$$

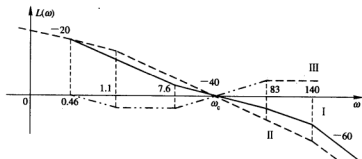


图 6-27

画出系统固有特性如图 6-27 中 II 所示 ($K = k_v = 500$)。将特性 I 减去特性 II 得到特性 III。特性 III 即为所求校正装置的伯德图, 或根据 $G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)}$ 可得到:

$$G_c(s) = \frac{(0.9s+1)(0.13s+1)}{(2.2s+1)(0.12s+1)}$$

验证: $\delta = 30\%$, $t_s = 0.22$ s。

讨论: 可将中频宽度 h 值增大, 可使 δ 减小, 或仅将 ω_2 减小一些也可。

例 6.20 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{Ke^{-0.01s}}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$, 要求系统的单位斜坡输入稳态误差小于 0.05, 且系统穿越频率大于 2 s^{-1} , 相位裕量大于 45° , 如果系统不能满足要求, 试设计一校正网络。

解 包含有纯迟后因子的系统, 因纯迟后不影响对数幅频特性, 而仅影响相频特性, 因而其分析设计与一般系统相同, 仅在分析与相位有关量时考虑到纯迟后影响。

根据 $e_{ss} \leq 0.05$, 得 $K \geq 20$, 取 $K = 20$ 。画出 $K = 20$ 时的伯德图如图 6-28 中 I 所示。

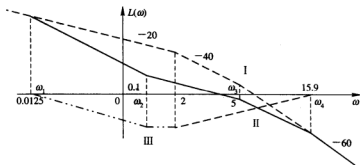


图 6-28

由 $L(\omega) = 0$ 得

$$20 \lg \frac{200}{\omega_3} = 0, \quad \omega_{c1} = 5.83$$

$$\varphi(\omega_{c1}) = -0.573\omega_{c1} - 90^\circ - \arctan\omega_{c1} - \arctan 0.2\omega_{c1} = -213.94^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = -33.94^\circ$$

不满足要求, 需要进行校正。

根据期望 $\gamma = 45^\circ$, 得中频宽 $h \geq \frac{\sin\gamma + 1}{1 - \sin\gamma} = 5.83$ 。

考虑纯迟后的影响, 将 h 取大, 初选 $h = 40$ 。由 ω_c 要求, 初选 $\omega_c = 2.5$ 。得

$$\omega_2 \leq \frac{2}{h+1}\omega_c = 0.122 \text{ s}^{-1}, \quad \text{取 } \omega_2 = 0.1$$

$$\omega_3 \geq \frac{2h}{h+1}\omega_c = 5 \text{ s}^{-1}$$

考虑到原系统的转折频率, 取 $\omega_3 = 5 \text{ s}^{-1}$ 。

中低频之间用 -40 dB/dec 线连接, 连接线 with 低频段交点为 ω_1 , 则

$$\omega_1 = \frac{\omega_2\omega_3}{K_v} = \frac{0.1 \times 2.5}{20} = 0.0125 \text{ s}^{-1}$$

高中频之间也用 -40 dB/dec 的线连接, 连接线 with 高频段交点为 ω_4 。

由

$$20 \lg \frac{\omega_1}{\omega_c} + 40 \lg \frac{\omega_4}{\omega_3} = 60 \lg \frac{\omega_4}{\omega_{c1}}$$

得 $\omega_4 = 15.9 \text{ s}^{-1}$ 。则期望特性如图 6-28 中 II 所示。

其相应的传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{20(10s+1)e^{-0.01s}}{s(80s+1)(0.2s+1)(0.063s+1)}$$

验证:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 90^\circ + \arctan 10\omega_c - \arctan 80\omega_c - \arctan 0.063\omega_c - 0.573\omega_c \\ &= 49.5^\circ > 45^\circ \end{aligned}$$

则

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{G_o(s)} = \frac{(0.5s+1)(10s+1)}{(80s+1)(0.063s+1)}$$

校正网络见图 6-28 中 III 所示。

讨论: 通过上述计算过程可见, 开环中含有纯迟后的校正设计与一般系统类似, 仅中频宽要适当加大。本题由于原穿越频率在 -60 dB/dec 斜线上, h 加大的尤为明显。本题的 h 值可略为减小一些, 仍会满足要求。

6.7 习 题

6.1 反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$, 试在以下三种串联校正网络中选择一种网络, 使校正后系统的稳定程度最好。(画出伯德图草图, 说明选择理由。)

$$(1) G_{a1}(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

$$(2) G_{a2}(s) = \frac{0.1s+1}{0.0025s+1}$$

$$(3) G_{a3}(s) = \frac{(0.5s+1)^2}{(10s+1)(0.04s+1)}$$

6.2 现在有一最小相位系统的开环伯德图如图 6-29 所示, 要求不降低原系统静态特性, 系统增益剪切频率 $\omega_c > \omega$, 相位初量 $\gamma \geq 45^\circ$ 。试分析在串联超前、滞后、超前一滞后及比例加积分校正中, 哪些校正能满足上述要求, 哪些校正不能满足上述要求(需简要说明理由)。

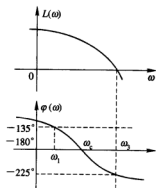


图 6-29

6.3 已知单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(10s+1)}{s(2s-1)}$ 。

(1) 画出完整的幅相特性, 用奈氏判据判断闭环系统稳定性。

(2) 利用频率法校正系统, 加入何种校正装置可使闭环系统稳定? 画出完整的幅相特性。

6.4 系统结构如图 6-30 所示。

(1) 若开关 K_1, K_2 均打开, 试求系统的性能指标 $\delta\%$ 和 t_s 。

(2) 为降低系统的超调量且提高系统的快速性, 试给出设计系统的两种方案, 并求出其中任意一种方案的性能指标 $\delta\%$ 和 t_s 。

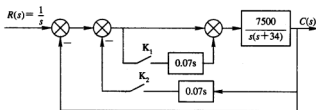


图 6-30

6.5 某系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{25}{s^2(0.025s+1)}$, 若要求不改变开环放大系数而使瞬态性能指标 $\delta\% \leq 28\%$, $t_s = 1.2$ s 试用期望对数频率特性法确定串联校正装置。

6.6 某 II 型系统的结构图如图 6-31 所示, 采用并联校正方法。未校正系统的传递函数为

$$G_1(s) = 0.335, G_2(s) = \frac{11\,350}{0.146s+1}, G_3(s) = \frac{6.2}{s^2(0.0072s+1)(0.042s+1)}$$

要求系统具有的性能指标为:

- (1) 加速度误差系数 $K_a = 4 \text{ s}^{-2}$;
- (2) 瞬态性能 $\delta\% \leq 25\%$;
- (3) $t_s \leq 1.2$ s。

试确定并联校正装置的特性。

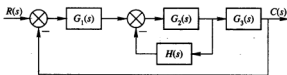


图 6-31

6.7 某单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(2s+1)}$, 为使闭环系统的主导极点 $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 5$, 速度误差系数 ≥ 50 , 试用根轨迹法确定系统校正方式和校正装置的特性。

6.8 某单位反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{1}{s(0.2s+1)(s+1)}$, 试确定串联校正装置的特性, 使谐振幅值 $M_r = 1.3$, 谐振频率 $\omega_r = 2.1 \text{ rad/s}$ 。

(提示: $M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$, $\omega_r = \omega_c \cos \gamma$, 或有主导极点, 可用二阶公式。)

6.9 已知某单位负反馈系统的根轨迹如图 6-32 所示。

(1) 写出该系统的闭环传递函数。

(2) 试用适当的校正方法, 使系统在任意值时均处于稳定状态, 并给出校正后系统的根轨迹图。

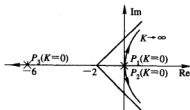


图 6-32

6.10 对于图 6-33 所示的复合控制系统, 若 $G_2(s)$ 包含一个积分环节且设 $G_2(s) = 1/(f_1s + f_2s^2 + \dots)$, 若取 $D_2(s) = f_1s + f_2s^2$, 证明这时的复合控制系统等价于 II 型系统。

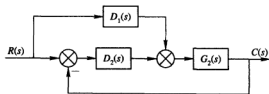


图 6-33

6.11 已知角度随动系统的结构如图 6-34 所示, 其中 $K_2 = 2000^\circ/V_s$, $T_f = 0.008$ s, $T_m = 1$ s, 系统的性能指标为: $k_v \geq 500/s$, $t_s \leq 0.4$ s, $\delta\% \leq 30\%$, 要求设计并联校正传递函数 $D(s)$ 并确定出 K_1 的大小。

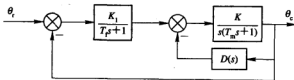


图 6-34

6.12 已知系统的开环传递函数为 $G_o = \frac{K(0.09s + 1)}{s(0.5s + 1)(0.009s + 1)}$ 。

- (1) 计算 ω_c 以使 M_r 最小;
- (2) 计算 k_v ;
- (3) 计算 ω_r ;
- (4) 计算闭环特性 $A(\omega_r)$ 和 $A(\omega_c)$ 。

6.13 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{6e^{-0.01s}}{s(s^2 + 4s + 6)(0.01s + 1)}$ ，串联校正装置的传递函数分别如下式所示：

(1) $G_c(s) = 1$;

(2) $G_c(s) = \frac{5(s+1)}{s+5}$;

(3) $G_c(s) = \frac{s+1}{5s+1}$ 。绘制系统的伯德图，求系统相位裕量 γ 和幅值裕量 $K_g(\text{dB})$ ，若系统稳定，试估算带宽 ω_b 和超调量 $\delta\%$ 。

第7章 采样控制系统

7.1 本章要求

- (1) 掌握 Z 正、反变换并熟悉 Z 变换的有关性质。
- (2) 正确处理离散系统数学模型, 掌握采样开关位置对闭环脉冲传递函数的影响。
- (3) 能熟练运用离散系统的稳定判据方法, 了解闭环极点在 z 平面的位置和采样周期对暂态性能及稳态性能的影响。

7.2 基本概念

1. 离散控制系统

离散控制系统是一种动态系统, 其特点是系统中总有一处或多处的信号在时间上是断续的, 在幅值上可能是采样时刻的值, 也可能是经过整量化后的数码。前者称为采样信号, 后者称为数字信号。其相应的系统, 分别称为采样控制系统和数字控制系统。两种系统均属于离散控制系统。

2. 信号的采样

采样开关 K 每隔 T 秒短暂地闭合一次(闭合时间为 τ), 以将系统的某个连续信号 $e(t)$ 转化为断续的脉冲序列 $e^*(t)$ 。由于 $\tau \ll T$, 故可以认为 $e(t)$ 在 τ 时间内基本不变。

当 $\tau \rightarrow 0$ 时有

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \quad (7-1)$$

其中: $\delta(t)$ 为单位脉冲函数, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 为单位脉冲序列。

理想的采样器等效于一个理想的单位脉冲序列发生器。采样过程相当于一个脉冲调制过程。采样开关的输出信号 $e^*(t)$ 可表示为两个函数的乘积, 其中载波信号 $\delta_T(t)$ 决定采样时间即输出函数存在的时刻, 而采样信号的幅值由输入信号决定。

3. 采样定理与采样频率的选取

一般来说, 连续信号 $e(t)$ 经采样得到的离散信号 $e^*(t)$ 在信息上是有丢失的, 造成信号的失真。由(7-1)式可得离散信号频谱 $E^*(j\omega)$ 和连续信号频谱 $E(j\omega)$ 之间的关系见(7-2)式。

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j\omega + jn\omega_s) \quad (7-2)$$

式中 $\omega_s = 2\pi/T$ 为采样频率。在离散信号频谱 $E^*(j\omega)$ 中, $n=0$ 的部分称为主频谱, 它与连续信号的频谱 $E(j\omega)$ 是相对应的, 除此之外, $E^*(j\omega)$ 还包括无限多的高频分量。为了准确复现连续信号, 必须使离散信号频谱中的各部分不重叠。若连续信号的频谱为有限带宽, 假设其最大频率为 ω_{\max} , 只有在 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 的条件下, 才能保证 $E^*(j\omega)$ 中相邻部分频谱互不重叠, 也就才有可能将采样后的离散信号无失真地恢复为原来的连续信号。这就是采样定理(香农定理)。

对于实际的非周期连续信号, 其最大频率 ω_{\max} 是无限的, 这给采样定理的实际应用带来困难。工程上, 一般可考虑选取频谱幅值下降至最大值的 5% 处所对应的频率作为该信号频谱中的最大频率 ω_{\max} , 然后按采样定理选择采样频率 ω_s 。

过大的 ω_s 在实现上较复杂和困难, 也将增加不必要的计算负担和高频干扰; 过小的 ω_s 会降低控制能力, 造成动态性能和稳态性能较差, 甚至使系统不稳定。采样周期的选取是离散控制系统中的一个关键因素。在工程实践上, 一般选取 $\omega_s = 10\omega_c$ 或者 $T = t_c/10$ 或者 $T = t_c/40$ 。

4. 保持器

根据采样定理, 在 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 的条件下, 离散信号频谱中的各分量彼此互不重叠是离散信号完全恢复成连续信号的前提。采用理想滤波器可滤去 $E^*(j\omega)$ 中各高频分量, 保留与连续信号频谱相对应的主频谱, 就可以无失真地恢复连续信号。理想滤波器在实际上是难以实现的, 保持器在频率特性上比较接近理想滤波器。

保持器是一种采用时域外推原理的装置, 有零阶保持器、一阶保持器等。零阶保持器采样有恒值外推的规律, 即它能把某时刻 nT 的采样值恒值地保持到下一采样时刻 $(n+1)T$, 其结构最简单, 应用也最广泛。零阶保持器的传递函数为:

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

其频率特性为:

$$G(j\omega) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

零阶保持器具有如下特点:

(1) 低通特性: 其幅值随频率的增大而迅速衰减, 具有明显的低通滤波特性。但除了主频谱外, 还存在一些高频分量, 造成离散控制系统的输出中存在纹波。

(2) 相角迟后特性: 其相角迟后量随频率的增大而加大, 在 $\omega = \omega_s$ 处, 迟后达 -180° , 使系统的稳定性变差。

(3) 时间迟后特性: 零阶保持器的输出平均响应为 $e(t - T/2)$, 表明其输出比输入在时间上迟后 $T/2$, 使系统总的迟后量加大, 对系统的稳定性不利。

5. Z 变换定义

连续信号 $x(t)$ 经采样后成为离散信号 $x^*(t)$, 表示为下式:

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

对离散信号 $x^*(t)$ 作拉氏变换, 并令 $z = e^{Ts}$, 则有:

$$X(z) = X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \quad (7-3)$$

关于 Z 变换,有必要强调以下几点:

(1) Z 变换原函数是 $x^*(t)$ 而不是 $x(t)$; $X(z)$ 是 $x^*(t)$ 的 Z 变换而不是 $x(t)$ 的 Z 变换。

(2) 用 Z 反变换对 $X(z)$ 求原函数时,得到的是 $x^*(t)$ 而不是 $x(t)$ 。

(3) 为图方便,常说“ $x(t)$ 的 Z 变换”,并写成 $Z[x(t)]$,这实际上是指 $x(t)$ 经过采样以后 $x^*(t)$ 的 Z 变换。

6. 差分方程

描述连续系统动态特性的数学模型是微分方程,而描述离散系统动态特性的数学模型是差分方程;差分与微分有类似的地方。

设函数 $x = f(t)$ 在第 k 个采样时刻的值为 $x(k)$,在第 $k+1$ 个采样时刻的值为 $x(k+1)$ 。则函数 $x = f(t)$ 在每两个相邻采样时刻之间的增量 $x(k+1) - x(k)$ 称为函数在第 k 个采样时刻的一阶向前差分; $x(k) - x(k-1)$ 称为一阶向后差分。分别记作:

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k) \quad \nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

一阶差分的差分,称为二阶差分,如二阶差分为:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= \Delta[\Delta x(k)] = \Delta x(k+1) - \Delta x(k) \\ &= x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

n 阶向前差分为:

$$\Delta^n x(k) = \Delta^{n-1} x(k+1) - \Delta^{n-1} x(k)$$

注意:微分与差分的区别,一阶微分为 $dx = xdt$, n 阶微分为 $d^{(n)}x = x^{(n)}dt$ 。由各差分所组成的方程称为差分方程。

n 阶线性定常系统的微分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ = b_0 \frac{d^n r(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_n r(t) \end{aligned}$$

n 阶线性定常系统的差分方程为:

$$\begin{aligned} c(k) + a_1 c(k-1) + \dots + a_{n-1} c(k-n+1) + a_n c(k-n) \\ = b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \dots + b_{n-1} r(k-m+1) + b_n r(k-m) \end{aligned}$$

式中 $c(t)$ (或 $c(k)$)、 $r(t)$ (或 $r(k)$) 分别表示输出和输入, a_k 、 b_k 为常数。

差分方程的求解主要有迭代法和 Z 变换法,前者适合计算机求解, Z 变换法多应用于理论分析和计算。

7. 脉冲传递函数

如图 7-1 所示,在零初始条件下,线性系统(或环节)输出脉冲序列的 Z 变换与输入脉冲序列的 Z 变换之比,称为系统(或环节)的脉冲传递函数。



图 7-1 开环采样系统

脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

需要注意的是,对于多数实际系统(或环节)的输出是连续信号,此时,可以在其输出端虚设一个理想采样开关,它与输入采样开关同步,这样就可以沿用脉冲传递函数。同样,对于一些环节,其输入也可能为连续信号,可按相同的方法处理。

7.3 Z 变换及其基本性质

1. Z 变换的三种方法

(1) 级数求和法:根据给出的 $x(t)$ 和采样周期 T ,可求出在各采样时刻的值 $x(nT)$,然后按(7-3)式直接写出 Z 变换的级数和。通常需要通过一定的数学技巧将所得的级数和式化简为封闭表达式。

(2) 部分分式法:首先得到连续函数 $x(t)$ 的拉氏变换形式 $X(s)$,再将 $X(s)$ 写成部分分式之和的形式:

$$X(s) = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{s + s_i}$$

其中, $A_i = \lim_{s \rightarrow -s_i} [X(s)(s + s_i)]$, $-s_i$ 为 $X(s)$ 的极点, k 为极点个数。则可按上式 $X(s)$ 得到所对应的 Z 变换式 $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{i=1}^k \frac{A_i z}{z - e^{-s_i T}}$$

除了上述方法以外,也可将 $X(s)$ 展开成能从 Z 变换表中查出的部分分式之和。

(3) 留数算法:若 $X(s)$ 的全部极点 p_i 为已知,则可用留数算法求其 Z 变换。

$$X(z) = \sum_{i=1}^k \text{Res} \left[X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] = \sum_{i=1}^k R_i \quad R_i \text{ 为 } X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \text{ 在 } s = p_i \text{ 时的留数}$$

当 $X(s)$ 具有一阶极点 $s = p_i$ 时,其留数 R_i 为:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \left[X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

若 $X(s)$ 具有 q 阶极点 $s = p$ 时,其留数 R 为:

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} (s - p)^q \left[X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

2. Z 反变换

由 Z 变换 $X(z)$ 求原函数 $x^*(t)$ 的运算过程称为 Z 反变换。需注意的是经 Z 反变换而求出的原函数只能是 $x^*(t)$ 而不是 $x(t)$ 。求取 Z 反变换也有三种方法:

(1) 长除法: $X(z)$ 通常可表示为两个有理多项式之比,用分母去除分子,可以求出按 z^{-1} 降幂次序排列的级数展开式如下:

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

则上式的 Z 反变换为:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= c_0\delta(t) + c_1\delta(t-T) + c_2\delta(t-2T) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\delta(t-nT) \end{aligned}$$

(2) 部分分式法: 将 $X(z)$ 展开成部分分式之和, 逐项查 Z 变换表可得到相应的 Z 反变换。 $X(z)$ 的反变换等于各部分分式项的 Z 反变换之和。

由于 Z 变换表中的 Z 函数都有一个因子 Z, 故用该法求 Z 反变换时, 先将 $X(z)/z$ 展开成部分分式之和, 再将各项乘上因子 Z, 然后逐项查 Z 变换表求 Z 反变换。

(3) 留数计算法: $X(z)$ 的 Z 反变换等于函数 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 在其所有极点上的留数之和。用公式表示为:

$$x(nT) = \sum_{i=1}^k \text{Res}[X(z)z^{n-1}] = \sum_{i=1}^k R_i$$

一阶极点的留数 R 为:

$$R = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)[X(z)z^{n-1}]$$

具有 q 阶重极点的留数为:

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} (z-p)^q [X(z)z^{n-1}]$$

3. Z 变换的基本性质

(1) 线性定理:

$$Z[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

(2) 延迟定理(负偏移定理):

$$Z[x(t-kT)] = z^{-k}X(z)$$

(3) 超前定理(正偏移定理):

$$Z[x(t+kT)] = z^k[X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(mT)z^{-m}]$$

(4) 复位移定理:

$$Z[x(t)e^{j\omega t}] = X(ze^{j\omega T})$$

(5) 初值定理:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

(6) 终值定理: 如果函数 $(1-z^{-1})X(z)$ 在 Z 平面的单位圆上及单位圆外没有极点, 则

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1-z)X(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})X(z)]$$

(7) 卷积和定理: 若

$$c(kT) = \sum_{n=0}^k g[(k-n)T]r(nT)$$

式中 n 为正整数, 当 n 为负整数时有

$$c(nT) = g(nT) = r(nT) = 0$$

则有

$$C(z) = G(z)R(z)$$

7.4 脉冲传递函数的求取

1. 开环脉冲传递函数

(1) 当开环系统由 n 个环节串联组成时, 如果每对相邻环节间均有同步采样开关分隔, 则该系统总的脉冲传递函数等于各组成环节脉冲传递函数的乘积。即

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdots G_n(z)$$

(2) 当开环系统由 n 个环节串联组成时, 如果每对相邻环节间没有同步采样开关分隔, 则该系统总的脉冲传递函数等于各组成环节传递函数乘积后的 Z 变换。即

$$G(z) = Z[G_1(s) \cdot G_2(s) \cdots G_n(s)] = G_1 G_2 \cdots G_n(z)$$

注意: 通常 $G_1(z) \cdot G_2(z) \cdots G_n(z) \neq G_1 G_2 \cdots G_n(z)$ 。

(3) 如图 7-2(a) 所示, 当开环系统中带有零阶保持器时, 可先将它等效为图 7-2(b) 的形式, 再求其脉冲传递函数。即

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1}) G_1(z)$$

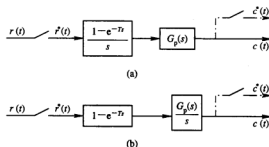


图 7-2 带有零阶保持器的开环系统

(4) 若已知开环系统的差分方程, 在不考虑零初始条件下, 对差分方程进行 Z 变换, 则系统输出的 Z 变换与输入的 Z 变换之比, 即为其脉冲传递函数。

2. 闭环脉冲传递函数

在离散系统中, 由于采样开关在闭环系统中配置和位置的不同, 故求闭环脉冲传递函数时, 需根据闭环系统的结构特点, 用代数方法或结构图变换方法逐步导出系统的闭环脉冲传递函数。

注意在求闭环脉冲传递函数时开关位置的影响: 在分子上, 要注意输入信号和前向通道的第一个环节之间是否存在开关, 若无开关只能写出 $C(z)$ 表达式; 在分母上要注意相邻的环节之间是否存在开关, 若无开关必须乘积后再进行 Z 变换。

需要指出的是, 闭环离散系统脉冲传递函数 $\phi(z)$ 和 $\phi_e(z)$ 不能直接从 $\phi(s)$ 和 $\phi_e(s)$ 求 Z 变换得来, 即 $\phi(z) \neq Z[\phi(s)]$, $\phi_e(z) \neq Z[\phi_e(s)]$ 。

表 7.1 给出了典型闭环离散系统的脉冲传递函数。

表 7.1 典型闭环离散系统的脉冲传递函数

系统结构图	等效结构图	$C(z)/R(z)$ 或 $C(z)$
		$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$ G 到 H 无开关, R 到 G 有开关
		$C(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$ H 到 G 无开关, R 到 G 无开关
		$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$ H 到 G (或 G 到 H)无开关, R 到 G 有开关
		$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)HG_2(z)}$
		$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1HG_2(z)}$
		$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$
		$C(z) = \frac{G_2(z)G_3(z)G_1R(z)}{1 + G_2(z)G_1HG_3(z)}$
		$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_2(z)HG_1(z)}$

7.5 离散系统的稳定性分析

1. 稳定判据

由于 Z 域是通过关系式 $z = e^{T\omega}$ 映射得到的, 故 Z 域内的稳定性的判据是采样系统特征方程的根是否在 Z 平面上以原点为圆心的单位圆内。

设线性离散系统见图 7-3 所示。其闭环特征方程为 $1 + GH(z) = 0$ 。则该系统稳定的充要条件为: 系统闭环特征方程的所有根 z_i 的幅值小于 1, 即 $|z_i| < 1$ 。

2. 双线性变换

判别系统的稳定性时, 对简单的低阶系统可直接求其特征方程的根来判别。对高阶系统, 可对其特征方程作双线性变换, 即令 $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$ (或 $z = \frac{1-\omega}{1+\omega}$), 代入闭环脉冲传递函数, 得出在 ω 平面上的特征方程 $1 + GH(\omega) = 0$ 。

双线性变换使 Z 平面上以原点为圆心的单位圆变成 ω 平面上的虚轴, 单位圆内变成 ω 平面上的左半部分, 单位圆外变成 ω 平面上的右半部分。此时 ω 平面与 S 平面具有相同的稳定特性。经过双线性变换后, 所有适合于线性连续系统的稳定判据, 都可以应用于线性离散系统, 如代数判据、频域判据。

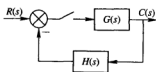


图 7-3

7.6 离散系统的分析与综合

1. 离散系统暂态性能

通过闭环脉冲传递函数, 求出系统在典型输入信号作用下的输出响应, 可以分析系统的动态性能。系统的动态性能取决于闭环零极点在 Z 平面上的位置分布。

(1) 若闭环系统具有 n 个实数极点 p_k , 则系统在单位阶跃输入下的动态响应为:

$$c(nT) = \sum_{k=1}^n a_k p_k^n$$

式中 a_k 是一个与闭环零极点有关的常数。极点在 Z 平面上的位置与其相应的动态响应间的关系见图 7-4 所示。

(2) 若闭环系统具有若干对共轭复数极点 $p_k, \overline{p_k}$, 则系统在单位阶跃输入下第 k 对复数极点的动态响应为:

$$c_k(nT) = 2 |a_k| |p_k|^{-n} \cos(n\theta_k + \phi_k) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

式中 a_k, θ_k 和 ϕ_k 是一个与闭环零极点有关的常数。极点在 Z 平面上的位置与其相应的动态响应间的关系见图 7-4 所示。

在图 7-4(b) 中极点为复数, 其特性表现为振荡, 当极点在单位圆内时振荡收敛 (越靠近原点振幅衰减越快), 在单位圆上为等幅振荡, 在单位圆外振荡发散; 振荡周期为 $nT = 2\pi T / \theta_k$, 当 $\theta_k = \pi/4$ 时的振荡周期为 $8T$ 。

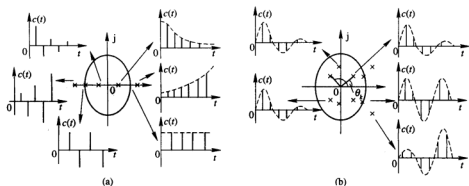


图 7-4 极点对动态性能的影响

在图 7-4(a)中极点为实数,分为两种情况:①当极点为正实数时,其特性表现为单调的,当极点在单位圆内时单调收敛(越靠近原点振幅衰减越快),在单位圆上为等幅的,在单位圆外为单调发散的;②当极点为负实数时,其特性表现为振荡的,当极点在单位圆内时,振荡收敛,在单位圆上为等幅振荡,在单位圆外振荡发散。

表 7.2 中给出了几种系统给定稳态误差的终值。

表 7.2 0 型、1 型和 2 型系统给定稳态误差的终值

给定输入	给定稳态误差的终值		
	0 型系统	1 型系统	2 型系统
$1(t)$	$\frac{1}{k_p}$	0	0
t	∞	$\frac{T}{k_v}$	0
$\frac{1}{2}t^2$	∞	∞	$\frac{T^2}{k_a}$

2. 稳态性能

稳态性能通常用稳态误差表示。与连续系统类似,求解稳态误差有静态误差系数法和动态误差系数法。静态误差系数法借助于终值定理。

设单位反馈采样系统的开环脉冲传递函数为 $G(z)$, 有

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)}$$

当闭环系统稳定时,系统的稳态误差为:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot R(z)$$

对应于不同参考输入信号时的稳态误差分别为:

$$\text{单位阶跃输入时: } e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{k_p}$$

$$\text{单位斜坡输入时: } e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{k_v}$$

$$\text{单位加速度输入时: } e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2}{k_a}$$

式中 k_p 、 k_v 、 k_a 分别为静态位置误差系数、速度误差系数和加速度误差系数,且

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)], \quad k_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z), \quad k_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

3. 根轨迹分析法

设采样系统的特征方程为 $1 + GH(z) = 0$, 则在 Z 平面上, 根轨迹的幅值和相角条件为:

$$|GH(z)| = 1 \quad |\angle GH(z)| = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

显然, 根据上式可以用连续系统根轨迹的作图法则, 作出采样系统的根轨迹。

需要注意的是, 在连续系统中, 决定系统临界稳定状态的是根轨迹与 S 平面上虚轴的交点; 而在离散系统中, 决定系统临界稳定状态的是根轨迹与 Z 平面上单位圆的交点。

4. 频率特性法

用对数频率特性分析离散系统时, 一般分如下三步:

(1) 首先作双线性变换, 把系统的开环脉冲传递函数 $GH(z)$ 变成 $GH(\omega)$;

(2) 其次令 $\omega = j\omega_p$ (ω_p 称为虚拟频率), 把 $GH(\omega)$ 变成 $GH(j\omega_p)$, $GH(j\omega_p)$ 称为虚拟频率特性;

(3) 由 $GH(j\omega_p)$ 绘制系统的对数频率特性, 可用连续系统中的分析方法去确定离散系统的稳定性、幅值裕量、相角裕量等, 以评价系统的动态性能和稳态性能。

需要注意的是, 虚拟频率并不等于实际频率, 二者之间存在非线性关系如下式:

$$\omega_p = \tan \frac{\omega T}{2}$$

另外, 考虑到采样信号频谱与连续信号频谱的关系, 采样系统频率特性中, 对应的 $\omega = 0 \rightarrow \frac{\omega_s}{2}$ 与 $\omega = \frac{\omega_s}{2} \rightarrow \omega_s$ 部分彼此对称于实轴, 以及对应 $\omega = \omega_s \rightarrow 2\omega_s$, $2\omega_s \rightarrow 3\omega_s$, ... 与 $\omega = 0 \rightarrow \omega_s$ 时的特性重复, 因而绘制采样系统频率特性时只需绘制 $\omega = 0 \rightarrow \frac{\omega_s}{2}$ 的特性。

5. 采样系统校正

离散系统常用的性能指标有: 稳定裕量、误差系数和频域性能指标, 如谐振频率和谐振幅值等; 系统在典型输入下, 具有零稳态误差和最小时间响应等性能要求。

与连续系统校正类似, 离散系统也可以用串联、并联、局部反馈和复合校正。根据系统中信号传递的特点, 其校正又可分为连续校正和数字校正(见图 7-5)。

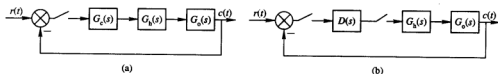


图 7-5 校正结构图

图 7-5 中 $G_h(s)$ 为零阶保持器的传递函数, $G_o(s)$ 为被控对象传递函数, $G_c(s)$ 为校正装置的传递函数, $D(s)$ 为数字校正装置的传递函数。

用于连续系统的校正方法, 在经过一些变换后(如双线性变换), 可以推广到离散系统中。

(1) 对于图(a)所示的连续校正结构图, 系统的开环脉冲传递函数为:

$$G(z) = Z[G_h(s)G_c(s)G_o(s)] = G_hG_cG_o(z)$$

由于校正装置 $G_c(z)$ 难于从 $G(z)$ 中分解出来, 因而在实际校正时, 每选择一次 $G_c(s)$, 就要绘制一次 $G(z)$ 所对应的特性, 并校验是否满足给定的指标。若不满足, 就需要重新选择 $G_c(s)$ 。往往要经过多次试探, 才能得到比较满意的结果。

实际上, 经常采用一些近似简化方法来进行系统的校正。

a) 当采样频率比较高, 大于闭环系统和保持器的带宽频率时, 可以考虑近似地把采样器和保持器忽略掉。这样, 就可以把离散系统当作连续系统来进行校正, 然后再对经过校正的离散系统性能进行检验。

b) 把采样器和零阶保持器近似地视为一个等效的迟后环节 $e^{-T/2}$, 其迟后时间为 $\frac{T}{2}$ 。这时, 可以将离散系统当作具有迟后环节的连续系统来进行校正。

(2) 对于图 7-5(b)所示的数字校正结构图, 可以采用双线性变换, 用 ω 域的伯德图进行校正, 具体方法如下:

a) 首先进行双线性变换, 把系统的开环脉冲传递函数 $GH(z)$ 变成 $GH(\omega)$ 。

b) 其次令 $\omega = j\omega_p$ (ω_p 称为虚拟频率), 把 $GH(\omega)$ 变成 $GH(j\omega_p)$, $GH(j\omega_p)$ 称为虚拟频率特性。

c) 由 $GH(j\omega_p)$ 绘制系统的对数频率特性, 可用连续系统中的分析方法去确定离散系统的稳定性、幅值裕量、相角裕量等, 以评价系统的动态性能和稳态性能。

d) 根据给定的性能指标, 确定校正装置在 ω 域的传递函数 $D(\omega)$ 。

e) 检验已校正后系统的性能指标。

f) 若满足给定的指标, 则进行 ω 反变换, 将 $D(\omega)$ 变成 $D(z)$; 否则返回到 d), 重新选择 $D(\omega)$ 。

6. 最少拍系统设计

最少拍系统又称为最小时间响应系统, 它是从暂态过程的快速性来考虑的。校正的目的是使系统在典型输入信号作用下, 经过最少采样周期结束其暂态过程。综合的任务是设计数字校正装置的脉冲传递函数。为实现最少拍的目的, 必须保证系统的闭环脉冲传递函数为 z^{-1} 的有限项和, 即

$$\phi(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}$$

对于图 7-5(b)所示系统, 校正装置的脉冲传递函数为:

$$D(z) = \frac{\phi(z)}{G(z)[1-\phi(z)]}, \quad \text{其中 } G(z) = G_hG_o(z)$$

由上式确定的 $D(z)$ 必须满足条件: 除了 $D(z)$ 含有 $z=1$ 的单极点外, 其它极点都在单位圆内; 其次是 $D(z)$ 的极点数 n 不小于它的零点个数 m , 即 $n \geq m$ 。满足这些条件才可物理实现 $D(z)$ 。

对于图 7-5(b)所示系统,校正后的误差传递函数为:

$$\phi_e(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)} = 1 - \phi(z)$$

此时有

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{\phi(z)}{1 - \phi(z)} = \frac{\phi(z)}{G(z)\phi_e(z)}$$

对于无稳态误差的最少拍系统的校正,就是选择适当的 $\phi(z)$ ($\phi_e(z) = 1 - \phi(z)$),使系统对某种给定输入信号的稳态误差为零,从而得到无稳态误差的最少拍系统。

为使稳态误差为零,一般选择 $\phi_e(z)$ 的形式为 $\phi_e(z) = (1 - z^{-1})^q F(z)$;当 $F(z) = 1$ 时,暂态过程可在最少拍内完成。

在典型信号输入下,离散系统在采样时刻无稳态误差最少拍系统的 $\phi(z)$ 见表 7.3。

表 7.3 典型最少拍系统

输入信号		$\phi(z)$	调节时间(拍数)
1 (单位阶跃函数)	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	z^{-1}	1
t	$\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$	2
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$	3

需要注意的是:根据一种典型输入信号设计的最少拍系统,往往不能很好地适应其它形式的输入信号。另外如果 $G(z)$ 含有传递迟后,或含有 Z 平面单位圆上或圆外的零极点,设计一个可实现的 $D(z)$,还必须增加如下条件:

- 所有 $G(z)$ 的单位圆上或圆外的极点都作为 $\phi_e(z)$ 的零点;
- 所有 $G(z)$ 的单位圆上或圆外的零点都作为 $\phi(z)$ 的零点;
- $\phi(z)$ 中应有 z^{-1} 作为因子,其方次应与 $G(z)$ 中的 z^{-1} 方次相等。

7.7 例题讲解

本章重点在掌握采样开关位置和采样周期对闭环脉冲传递函数的影响的基础上;应根据离散系统的结构图,求出闭环脉冲传递函数,并能根据脉冲传递函数运用 Z 变换确定系统的性能指标尤其是稳定性。

例 7.1 试求 $X(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)}$ 的 Z 变换(T 为采样周期)。

解
$$X(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{1}{s^2(s+1)} = (1 - e^{-Ts})F(s)$$

则
$$X(z) = (1 - z^{-1})F(z) \quad (\text{利用线性和滞后定理})$$

方法一 部分分式法:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

则

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$

故

$$X(z) = (1-z^{-1})F(z) = \frac{1-(T+1)e^{-T} + (t-1+e^{-T})z}{z^2 - (1+e^{-T})z + e^{-T}}$$

方法二 留数法:

$X(z)$ 有两个极点即 $s_1 = 0, s_2 = -1$, 则

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[F(s) \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=s_i} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} \left[s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=0} + \left[(s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=-1} \\ &= \left[-\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] + \frac{z}{z-e^{-T}} \end{aligned}$$

所以

$$X(z) = (1-z^{-1})F(z) = \frac{1-(T+1)e^{-T} + (T-1+e^{-T})z}{z^2 - (1+e^{-T})z + e^{-T}}$$

注意: $X(z) \neq \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[X(s) \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=s_i}$, 因 $X(s)$ 分子中有 e^{-Ts} .

例 7.2 试求 $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ 的 Z 反变换。

解 方法一: 长除法。

$$\text{相应的脉冲序列为 } X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

$$x^*(t) = \delta(t-2T) + 4\delta(t-3T) + 11\delta(t-4T) + \dots$$

所以

$$x(0) = 0, x(1) = 0, x(2) = 1, x(3) = 4, x(4) = 11, \dots$$

长除过程如下:

$$\begin{array}{r} z^{-2} + 4z^{-3} + 11z^{-4} + \dots \\ z^3 - 4z^2 + 5z - 2 \overline{) z} \\ \underline{-(z - 4 + 5z^{-1} - 2z^{-2})} \\ 4 - 5z^{-1} + 2z^{-2} \\ \underline{-(4 - 16z^{-1} + 20z^{-2} - 8z^{-3})} \\ 11z^{-1} - 18z^{-2} + 8z^{-3} \\ \underline{-(11z^{-1} - 44z^{-2} + 55z^{-3} - 22z^{-4})} \\ 26z^{-2} - 47z^{-3} + 22z^{-4} \\ \vdots \end{array}$$

所以

$$X(z) = z^{-2} + 4z^{-3} + 11z^{-4} + \dots$$

方法二: 用部分公式求解。

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{X(z)}{z} \cdot (z-2) \right] = 1, \quad B = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{X(z)}{z} \cdot (z-1)^2 \right] = -1,$$

$$C = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} \cdot (z-1)^2 \right] = -1$$

所以
$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} \quad (\text{对应 } x(t) = 2^t - \frac{t}{T} - 1(t))$$

故
$$x(nT) = 2^n - n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

注意：在采用部分分式法时，应写成 $\frac{X(z)}{z}$ ，以便于求出 A, B, C 常数；使 $X(z)$ 分解成几部分典型信号之和。

讨论：若令 $X(z) = \frac{A_1}{z-2} + \frac{B_1}{(z-1)^2} + \frac{C_1}{z-1}$ ，此时 $A_1 = 2, B_1 = -1, C_1 = -2$ 。则

$$X(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1}$$

显然上式左侧不便求出其 Z 反变换，此时需作如下处理：

利用初值定理：

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 0$$

再利用 Z 变换性质(超前定理)，有

$$zX(z) - zx(0) = zX(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}$$

因为

$$Z[x(n+1)] = zX(z) - zx(0)$$

所以

$$x(n+1) = 2 \cdot 2^n - n - 2, \quad x(0) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即

$$x(nT) = 2^n - n - 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

方法三：留数法。

$$X(nT) = \text{Res}[X(z) \cdot z^{n-1}]$$

$$= [X(z)(z-2)z^{n-1}]_{z=2} + \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} [X(z) \cdot (z-1)^2 \cdot z^{n-1}]_{z=1}$$

$$= 2^n - n - 1$$

例 7.3 已知差分方程： $e(k+2) - 1.5e(k+1) + 0.5e(k) = 0$ ， $e(0) = 0$ ， $e(1) = 0.5$ ，试求 $e(nT)$ 及 $e(\infty)$ 。

解
$$Z[e(k+2)] = z^2 E(z) - z^2 e(0) - ze(1) = z^2 E(z) - 0.5z$$

$$Z[e(k+1)] = zE(z) - ze(0) = zE(z)$$

对差分方程两边取变换后有：

$$z^2 E(z) - 0.5z - 1.5zE(z) + 0.5E(z) = 0 \quad (z^2 - 1.5z + 0.5)E(z) = 0.5z$$

$$E(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{E(z)}{z} \cdot (z-1) \right] = 1$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 0.5} \left[\frac{E(z)}{z} (z-0.5) \right] = -1$$

所以

$$E(z) = \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \right]$$

对上式取反变换得

$$e(nT) = (1 - 0.5^n)$$

显然

$$e(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = 1$$

也可利用终值定理求得, 即 $e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 1$ 。

注意终值定理的应用是有条件的, 即要求 $(1 - z^{-1})E(z)$ 在单位圆上和单位圆外解析。

例 7.4 试求下列函数的初值和终值。

$$(1) E(z) = \frac{z^2(z^2 + z + 1)}{(z^2 - 0.8z + 1)(z^2 + z + 0.8)}$$

$$(2) E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

解 (1) 由初值定理得

$$e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z^2 + z + 1)}{(z^2 - 0.8z + 1)(z^2 + z + 0.8)} = 1$$

由于 $E(z)$ 有四个极点, 且都位于单位圆内, 故由终值定理得:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^2(z^2 + z + 1)}{(z^2 - 0.8z + 1)(z^2 + z + 0.8)} = 0 \end{aligned}$$

(2) 由初值定理得

$$e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = 0$$

由于 $E(z)$ 有位于单位圆外的极点 $z = 2$, 故不能用终值定理。

$$\text{因 } e^*(t) = Z^{-1}[E(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} 10(-1+2^n)\delta(t-nT)$$

所以 $e(\infty) \rightarrow \infty$ 。

例 7.5 设系统如图 7-6 所示, 求系统的脉冲传递函数。(采样周期为 T)

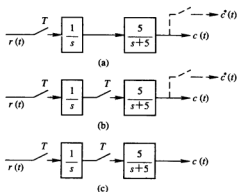


图 7-6

解 图(a):

$$\begin{aligned}\frac{Z[c^*(t)]}{Z[r^*(t)]} &= \frac{C(z)}{R(z)} = G(z) = G_1 G_2(z) = Z\left[\frac{5}{s(s+5)}\right] \\ &= Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}\right] = \frac{z[1 - e^{-5T}]}{(z-1)(z - e^{-5T})}\end{aligned}$$

图(b):

$$\begin{aligned}\frac{Z[c^*(t)]}{Z[r^*(t)]} &= \frac{C(z)}{R(z)} = G(z) = G_1(z) G_2(z) \\ &= Z\left[\frac{1}{s}\right] Z\left[\frac{5}{s+5}\right] = \frac{5z^2}{(z-1)(z - e^{-5T})}\end{aligned}$$

图(c):

$$\begin{aligned}Z[c^*(t)] &= C(z) = G_1 R(z) \cdot G_2(z) \\ &= Z\left[\frac{1}{s^2}\right] \cdot Z\left[\frac{5}{s+5}\right] = \frac{5z^2 T}{(z-1)^2 (z - e^{-5T})}\end{aligned}$$

讨论: 比较(a)和(b)两系统的结果可见, $G_1(z)G_2(z) \neq G_1 G_2(z)$, 但两者的极点相同, 且由 $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$ 的极点决定; 而两者的零点不同。对于图(c), 由于输入 $r(t)$ 与其首先作用的环节 $G_1(s)$ 之间没有采样开关, 只能获得 $C(z)$ 。

例 7.6 设图 7-7 所示系统中所有采样开关均同步工作, 求系统的闭环脉冲传递函数 $G_1(z)$ 或输出 $C(z)$ 。

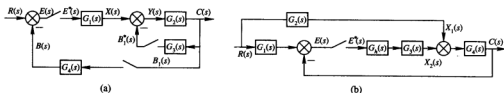


图 7-7

解 (1) $C(s) = Y(s)G_2(s) = [X(s) - B_1^*(s)]G_2(s)$

$$= [G_1(s)E^*(s) - B_1^*(s)]G_2(s)$$

$$B_1(s) = G_3(s)C(s) = G_2(s)G_3(s)[G_1(s) \cdot E^*(s) - B_1^*(s)]$$

对上式离散化得

$$B_1^*(s) = [G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^* \cdot E^*(s) - [G_2(s)G_3(s)]^* \cdot B_1^*(s)$$

$$B_1^*(s) = \frac{[G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^*}{1 + [G_2(s)G_3(s)]^*} \cdot E^*(s)$$

故 $C(s) = [G_1(s)E^*(s) - B_1^*(s)]G_2(s)$

$$= \left[G_1(s)E^*(s) - \frac{[G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^*}{1 + [G_2(s)G_3(s)]^*} \cdot E^*(s) \right] G_2(s)$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s)[G_2(s)G_3(s)]^* - G_2(s)[G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^*}{1 + [G_2(s)G_3(s)]^*} \cdot E^*(s)$$

对上式离散化得离散化式:

$$C^*(s) = \frac{[G_1(s)G_2(s)]^* + [G_1(s)G_2(s)]^* [G_2(s)G_3(s)]^* - G_2^*(s)[G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^*}{1 + [G_2(s)G_3(s)]^*} \cdot E^*(s)$$

又因

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G_4(s)C^*(s)$$

则将 $E^*(s) = [R^*(s) - G_4^*(s)C^*(s)]$ 代入离散化式得:

$$\begin{aligned} (1 + [G_2(s)G_3(s)]^*)C^*(s) &= \{[G_1(s)G_2(s)]^* + [G_1(s)G_2(s)]^* [G_2(s)G_3(s)]^* \\ &\quad - G_2^*(s)[G_1(s)G_2(s)G_3(s)]^*\} \\ &\quad \cdot [R^*(s) - G_4^*(s)C^*(s)] \end{aligned}$$

对上式求 Z 变换得:

$$\begin{aligned} \{[1 + G_2G_3(z)] + G_1G_2(z)G_4(z) + G_1G_2(z)G_2G_3(z)G_4(z) \\ - G_2(z)G_1G_2G_3(z)G_4(z)\} \cdot C(z) \\ = [G_1G_2(z) + G_1G_2(z)G_2G_3(z) - G_2(z)G_1G_2G_3(z)]R(z) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1G_2(z)[1 + G_2G_3(z)] - G_2(z)G_1G_2G_3(z)}{[1 + G_2G_3(z)][1 + G_1G_2(z)G_4(z)] - G_2(z)G_1G_2G_3(z)G_4(z)}$$

讨论: 当 $G_1(z) = 1$ 时, $\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_2(z)}{1 + G_2G_3(z) + G_2(z)G_4(z)}$, 该式似乎符合梅逊公式

的结论, 但对于 $G_1(z) \neq 1$ 时的结论(见题), 显然该式是不符合梅逊公式的。需要指出的是, 对于离散系统, 一般不能运用梅逊公式, 只有当离散系统是单回路时, 才可采用梅逊公式。再次强调的是, 对于多回路闭环离散系统, 目前尚无类似单回路, 可直接运用类似梅逊公式的方法去计算 $C(z)$ 或 $\frac{C(z)}{R(z)}$, $G_1(s) = 1$ 时的结论是一种巧合。

$$\begin{aligned} (2) \quad X_1(s) &= G_2(s)R(s), E(s) = G_1(s)R(s) - C(s), E^*(s) = G_1R^*(s) - C^*(s) \\ X_2(s) &= G_h(s)G_3(s)E^*(s) = G_h(s)G_3(s)[G_1R^*(s) - C^*(s)] \\ C(s) &= G_4(s)[X_1(s) + X_2(s)] \\ &= G_4(s)G_2(s)R(s) + G_4(s)G_hG_3(s)[G_1R^*(s) - C^*(s)] \\ C^*(s) &= G_2G_4R^*(s) + G_hG_3G_4^*(s)G_1R^*(s) \\ &\quad - G_4G_hG_3^*(s)G_1R^*(s) - G_4G_hG_3^*(s)C^*(s) \\ [1 + G_hG_3G_4^*(s)]C^*(s) &= G_2G_4R^*(s) + G_1R^*(s)G_hG_3G_4^*(s) \end{aligned}$$

对上式求 Z 变换得

$$C(z) = \frac{G_2G_4R(z) + G_1R(z)G_hG_3G_4(z)}{1 + G_hG_3G_4(z)}$$

讨论: 由于(b)图是单回路离散系统, 可采用单回路梅逊公式方法。单回路为从采样开关处开始沿 $G_h(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ 到采样开关。由于 $G_h(s)$, $G_3(s)$ 和 $G_4(s)$ 之间无采样开关, 所以单回路增益为 $G_hG_3G_4(z)$ 。有两条前向通路:

$R(s) \rightarrow G_2(s) \rightarrow G_4(s) \rightarrow C(s)$, 增益为 $G_2G_4R(z)$;

$R(s) \rightarrow G_1(s) \rightarrow \text{采样开关} \rightarrow G_h(s) \rightarrow G_3(s) \rightarrow G_4(s) \rightarrow C(s)$, 增益为 $G_hG_3G_4(z)G_1R(z)$ 。

所以

$$C(z) = \frac{G_2G_4R(z) + G_hG_3G_4(z)G_1R(z)}{1 + G_hG_3G_4(z)}$$

例 7.7 已知系统如图 7-8 所示, 采样周期 $T = 1\text{ s}$, $r(t) = 2t$, $n(t) = 1(t)$, 求系统的输出脉冲序列。

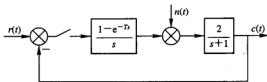


图 7-8

解 系统连续部分的传递函数为

$$G(s) = G_h(s)G_o(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{2}{s+1}$$

$$G(z) = \frac{2(1 - e^{-T})}{z - e^{-T}} = \frac{1.264}{z - 0.368}$$

设 $n(t) = 0$, 只考虑 $r(t) = 2t$ 的作用时:

$$R(z) = \frac{2Tz}{(z-1)^2} = \frac{2z}{(z-1)^2}$$

$$C_1(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \cdot R(z) = \frac{2.528z}{z^3 - 1.104z^2 - 0.792z + 0.896}$$

由长除法得

$$C_1(z) = 2.528z^{-2} + 2.791z^{-3} + 5.083z^{-4} + 5.557z^{-5} + \dots$$

则有

$$C_1^*(t) = 2.528\delta(t-2T) + 2.791\delta(t-3T) + 5.083\delta(t-4T) + 5.557\delta(t-5T) + \dots$$

设 $r(t) = 0$, 只考虑 $n(t) = 1(t)$ 的作用时:

$$C_2(z) = \frac{G_o N(z)}{1 + G_h G_o(z)} = \frac{G_o N(z)}{1 + G(z)}$$

因为

$$G_o(s)N(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

则

$$G_o N(z) = \frac{1.624z}{(z-1)(z-0.368)}$$

所以

$$C_2(z) = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z - 0.896}$$

由长除法得

$$C_2(z) = 1.264z^{-1} + 0.131z^{-2} + 1.146z^{-3} + 0.265z^{-4} + 1.043z^{-5} + \dots$$

系统输出为

$$C(z) = C_1(z) + C_2(z)$$

$$= 1.264z^{-1} + 2.411z^{-2} + 3.937z^{-3} + 5.348z^{-4} + 6.6z^{-5} + \dots$$

讨论: 在线性离散系统中, 同样可以应用叠加原理求多个输入信号作用下的系统输出。需注意的是, 由于变换法不能得到采样之间的时间信息, 故以上所求为 $c^*(t)$, 只能反映采样时刻的输出值, 由它所画的曲线可以看作系统输出的 $c(t)$ 近似曲线。

例 7.8 已知系统如图 7-9 所示。

(1) 当采样周期 $T=0.4\text{ s}$ 和 $T=3\text{ s}$ 时, 求使系统稳定的 K 值范围。

(2) 去掉系统的零阶保持器后, 再分别求出相应的 K 值范围。

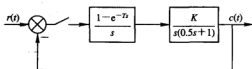


图 7-9

解 (1) 系统连续部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(0.5s+1)}$$

相应的变换为

$$G(z) = K \left[\frac{T}{z-1} - \frac{0.5(1-e^{-\frac{T}{s}})}{z-e^{-\frac{T}{s}}} \right]$$

当 $T=0.4\text{ s}$ 时,

$$G(z) = \frac{0.125K(z+0.76)}{(z-1)(z-0.45)}$$

系统的闭环特征方程为

$$1+G(z) = 1 + \frac{0.125K(z+0.76)}{(z-1)(z-0.45)}$$

即 $z^2 + (0.125K - 1.45)z + (0.45 + 0.095K) = 0$

作双线性变换, 令 $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$, 得

$$(2.9 - 0.035K)\omega^2 + (0.55 - 0.095K)\omega + (2.9 - 0.03K) = 0$$

要使系统稳定, K 值必须满足:

$$\begin{cases} 2.9 - 0.035K \geq 0 \\ 2(0.55 - 0.095K) > 0 \Rightarrow 0 < K < 5.79 \\ 0.22K > 0 \end{cases}$$

(若令 $z = \frac{1-\omega}{1+\omega}$, 得 $0.22K\omega^2 + 2(0.55 - 0.095K)\omega + (2.9 - 0.03K) = 0$; 要使系统

稳定, 必使该式各系数大于零, 结论同上。)

当 $T=3\text{ s}$ 时, 按与上面相同的方法, 可求得使系统稳定的 K 值是 6。

讨论: 由此可见, 采样周期影响系统的稳定性, T 取得过大, 可能导致系统不稳定; 但取得过小, 又会产生其它矛盾。所以设计时应适当选取值。

(2) 去掉系统中的零阶保持器后, 其连续部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$$

相应的 Z 变换为

$$G(z) = \frac{Kz(1 - e^{-T/0.5})}{(z-1)(z - e^{-T/0.5})}$$

$T = 0.4$ 时,

$$G(z) = \frac{0.55Kz}{(z-1)(z-0.45)}$$

系统的闭环特征方程为

$$z^2 + (0.55K - 1.45)z + 0.45 = 0$$

作双线性变换, 令 $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$, 得

$$(2.9 - 0.55K)\omega^2 + 0.55 \times 2\omega + 0.55K = 0$$

应用劳斯判据, 求得系统稳定时的取值范围是 $0 < K < 5.27$; 当 $T = 3$ 时, K 值范围是 $0 < K < 2$ 。

讨论: 比较上面所得的结果可以看出, 当采样周期较小时, 有无保持器对系统稳定性影响不大; 但当 T 较大时, 保持器将产生较大的相位滞后, 这将会使系统的稳定性变坏。应该注意, 讨论离散系统的稳定性时, 只着眼于采样时刻的值; 在实际应用中, 还应注意采样时刻之间存在的“隐藏振荡”。

例 7.9 试分别用静态误差系数法和动态误差系数法, 计算图 7-10 所示系统的稳态误差。图中 $K = 10$, $T = 0.2$, $r(t) = 1(t) + t + \frac{1}{2}t^2$

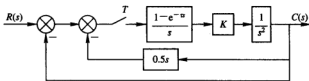


图 7-10

解 系统开环脉冲传递函数为:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot 10 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (1+0.5s)\right] = 10(1-z^{-1})Z\left[\frac{1+0.5s}{s^3}\right] \\ &= (1-z^{-1})\left[\frac{5T^2(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2}\right] \end{aligned}$$

代入 $T = 0.2$ 得

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

(1) 用静态误差系数法求解。

由开环脉冲传递函数可知系统为 II 型, 则

$$\text{位置误差系数} \quad k_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \infty$$

$$\text{速度误差系数} \quad k_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \infty$$

$$\text{加速度误差系统} \quad k_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0.4$$

故系统的稳态误差为

$$e(\infty) = e_s = \frac{1}{k_p} + \frac{T}{k_v} + \frac{T^2}{k_a} = 0.1$$

(2) 用动态误差系数法求解。

系统的误差脉冲传递函数为

$$\phi_e(z) = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.8z + 0.2}$$

故

$$\phi_e^* = \phi_e(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{(e^{sT}-1)^2}{e^{2Ts} - 0.8e^{Ts} + 0.2}$$

动态误差系统为:

$$C_0 = \phi_e^*(s) \Big|_{s=0} = 0, C_1 = \frac{d\phi_e^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 2, C_2 = \frac{d^2\phi_e^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = 0.2$$

因为

$$r(t) = 1(t) + t + \frac{1}{2}t^2$$

所以

$$\dot{r}(t) = 1+t, \quad \ddot{r}(t) = 1, \quad \ddot{\ddot{r}}(t) = 0$$

故所求的误差级数为:

$$\begin{aligned} e(nT) &= C_0 r(nT) + C_1 \dot{r}(nT) + \frac{1}{2!} C_2 \ddot{r}(nT) \\ &= \frac{1}{2!} C_2 \ddot{r}(nT) = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 1 = 0.1 \end{aligned}$$

所以 $e(\infty) = 0.1$ 。

例 7.10 离散系统如图 7-11 所示, 采样周期 $T=0.4$ s。试作出系统的根轨迹, 求出系统临界稳定时的 K 值, 并分析 K 值变化时系统响应的主要特征。

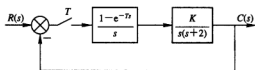


图 7-11

解 系统前向通道的传递函数为

$$G(s) = \frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+2)}$$

其 Z 变换为:

$$G(z) = \frac{K[(2T-1+e^{-2T})z - 2Te^{-2T} - e^{-2T} + 1]}{4(z-1)(z-e^{-2T})}$$

当 $T=0.4$ 时, 开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{K_g(z+0.76)}{(z-1)(z-0.45)}$$

其中 $K_g = K/16$ 。

① 系统有两条根轨迹, 起于开环极点 1 和 0.45, 终于开环零点 -0.76 和无穷远。

② 实轴上根轨迹区间是 $(-\infty, -0.76]$, $[0.45, 1]$ 。

③ 由 $\frac{d}{dz}[G(z)] = 0$ 可求得分离点为 0.7 和 -2.22。

同连续系统一样, 由于开环零点在两个开环极点同一侧, 可以证明复平面上的根轨迹是一个圆, 其圆心在 $z = -0.76$ 处, 半径为 1.46 ($1.46 = 0.7 + 0.76$)。系统根轨迹如图 7-12 所示。

根轨迹与单位圆(虚线)的交点 A 所对应的值即为临界稳定时的 K 值。

因为

$$K_g = \frac{|A - 0.45| \cdot |A - 0.7|}{|A + 0.76|} = \frac{1.15 \times 0.96}{1.46} = 0.75 \quad (\text{作图法求 } K_g)$$

所以 $K = 16K_g = 16 \times 0.75 = 12$ 。

或用计算法求 K : $G(z) = -1$ 为根轨迹方程; $|z| = 1$ 或 $z = e^{j\theta}$ 为单位圆方程。

将 $z = e^{j\theta}$ 代入 $G(z) = -1$, 即

$$z^2 + (K_g - 1.45)z + 0.76K_g + 0.45 = 0$$

得

$\cos^2\theta - \sin^2\theta + (K_g - 1.45)\cos\theta + 0.76K_g - 0.45 + j[2\cos\theta\sin\theta + (K_g - 1.45)] = 0$
令实部和虚部等于零, 解之得 $K_g = 0.72$, 所以

$$K = 16K_g = 16 \times 0.72 = 11.52$$

分离点 $z = 0.7$ 处的 K_g 值为

$$K_g = \frac{|0.7 - 1| \cdot |0.45 - 0.7|}{|0.7 + 0.76|} = 0.05$$

相应地

$$K = 16K_g = 0.82$$

故当 $0 < K \leq 0.8$ 时, 系统出现一对实正极点, 系统的响应为非振荡的。当 $0.8 < K < 11.52$ 时, 系统的一对共轭复极点在单位圆内, 系统的响应为稳定振荡的。当 $K \geq 11.52$ 时, 系统是不稳定的。

讨论: 离散系统的根轨迹法则与连续系统的根轨迹法则相同。需注意的是, 在连续系统中, 决定系统临界稳定状态的是根轨迹与 S 平面虚轴的交点; 而在离散系统中, 决定系统临界稳定状态的是根轨迹与 Z 平面上单位圆的交点。

例 7.11 设离散系统如图 7-13, 其中采样周期为 $T = 1$ s。

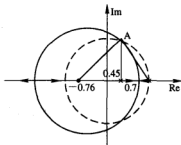


图 7-12

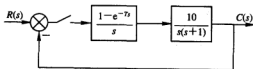


图 7-13

(1) 若要求系统在单位斜坡输入时实现最少拍控制, 试求数字控制器 $D(z)$;

(2) 若在(1)基础上要求无波纹最少拍控制, 试求 $D(z)$ 。

解 (1) 系统开环传递函数为

$$G(s) = G_h(s)G_o(s) = \frac{10(1 - e^{-sT})}{s^2(s+1)}$$

则

$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

因要求 $r(t) = t$ 时实现最少拍系统, 则系统误差脉冲传递函数为

$$\phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

闭环脉冲传递函数为

$$\phi(z) = 1 - \phi_e(z) = 2z^{-1}(1 - 0.5z^{-1})$$

说明: 若 $r(t) = 1(t) + t$ 时, $\phi_e(z)$ 仍取上式, 若 $r(t) = t + \frac{1}{2}t^2$ 时, ϕ_e 取 $(1 - z^{-1})^3$ 。

$G(z)$ 无单位圆外零点, 仅有一个 $z = 1$ 的极点, 该极点正好被 $\phi_e(z)$ 的 $z = 1$ 零点补偿; $G(z)$ 中延迟 z^{-1} 已包含于 $\phi_e(z)$ 中。所以上述设计 $\phi_e(z)$ 和 $\phi(z)$ 满足闭环稳定和 $D(z)$ 实现要求。故有

$$D(z) = \frac{\phi(z)}{G(z)\phi_e(z)} = \frac{0.543(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.717z^{-1})}$$

讨论: 当 $G(z)$ 包含有单位圆外的零点时, $\phi_e(z)$ 的零点应包含 $G(z)$ 单位圆外的极点。 $\phi(z)$ 的零点应包含 $G(z)$ 单位圆外的零点。如若 $r(t) = 1(t)$ 时

$$G(z) = \frac{z^{-1}(1 + 1.131z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.135z^{-1})}$$

设计最少拍控制。因此时 $G(z)$ 有一零点 $z = 1.131$ 在单位圆外, 令

$$\phi(z) = a_1 z^{-1}(1 + 1.131z^{-1}), \quad \phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_2 z^{-1})$$

根据 $\phi(z) + \phi_e(z) = 1$ 得

$$a_1 = 0.469, \quad a_2 = 0.531$$

此时应取

$$\phi(z) = 0.469z^{-1}(1 + 1.131z^{-1}), \quad \phi_e(z) = (1 - z^{-1})(1 + 0.531z^{-1})$$

(2)* 因为对象脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.717z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$

无波纹要求 $\phi(z)$ 的零点完全补偿 $G(z)$ 的所有零点(无论是单位圆内或圆外), 所以 $\phi(z)$ 应取为 $z^{-1}(1 + 0.717z^{-1}) \cdot A(z)$, 其中 $A(z)$ 为 z^{-1} 的多项式。

从(1)可知仅最少拍时, $\phi(z)$ 为二阶; 无波纹时, $\phi(z)$ 的阶数要增加一阶。又根据最少拍要求, 取 $A(z) = a + bz^{-1}$, 相应地 $\phi_e(z)$ 也提高一阶, 取 $\phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + cz^{-1})$ 。

根据 $\phi(z) + \phi_e(z) = 1$, 有

$$\phi(z) = az^{-1} + (b + 0.717a)z^{-2} + 0.717bz^{-3}$$

$$1 - \phi_e(z) = (2 - c)z^{-1} + (2c - 1)z^{-2} - cz^{-3}$$

由此得

$$a = 1.408, \quad b = -0.826, \quad c = 0.592$$

所以

$$\phi(z) = 1.408z^{-1}(1 + 0.717z^{-1})(1 - 0.587z^{-1})$$

$$\phi_s(z) = (1 - z^{-1})^2(1 + 0.592z^{-1})$$

$$D(z) = \frac{\phi(z)}{G(z)\phi_s(z)} = \frac{0.383(1 - 0.368z^{-1})(1 - 0.587z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.592z^{-1})}$$

例 7.12 采样系统如图 7-14 所示, 试求系统的闭环脉冲传递函数和误差脉冲传递函数。

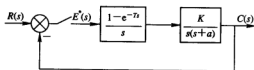


图 7-14

解 连续部分为

$$G(s) = \frac{K(1 - e^{-Ts})}{s^2(s+a)} = \frac{K}{a^2}(1 - e^{-Ts}) \left(\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \right)$$

则

$$G(z) = \frac{K}{a^2} \frac{(a-1 + e^{-aT})z + 1 - (a+1)e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

闭环脉冲传递函数为:

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \\ &= \frac{[(a-1 + e^{-aT})z + 1 - (a+1)e^{-aT}]}{a^2 z^2 + [K(a-1) - a^2 + (K-a^2)e^{-aT}]z + K + (a^2 - K - Ka)e^{-aT}} \end{aligned}$$

误差脉冲传递函数为:

$$\begin{aligned} \frac{E(z)}{R(z)} &= \frac{1}{1+G(z)} \\ &= \frac{a^2(z-1)(z-e^{-aT})}{a^2 z^2 + [K(a-1) - a^2 + (K-a^2)e^{-aT}]z + K + (a^2 - K - Ka)e^{-aT}} \end{aligned}$$

讨论: 由 $G(s)$ 求 $G(z)$ 时, 无论采用部分分式法或留数法, 应先利用变换性质将 $[1 - e^{-Ts}]$ 变为 $[1 - z^{-1}]$, 再对其它部分用留数法等; $(1 - e^{-Ts})$ 不能参与留数法和部分分式法。

即若 $G(s) = (1 - e^{-Ts})G_1(s)$, 则有

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z[G_1(s)], Z[G_1(s)] = \sum \text{Res} \left[G_1(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

而式 $Z[G(s)] = \sum \text{Res} \left[(1 - e^{-Ts})G_1(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$ 是错误的。

另外需强调的是, 采样系统的闭环脉冲传递函数不等于对应连续系统的闭环传递函数的变换, 即 $\frac{C(Z)}{R(Z)} \neq Z \left[\frac{C(S)}{R(S)} \right]$ 。

7.8 习 题

7.1 确定下列函数的初值和终值:

① $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

② $E(z) = \frac{z(z^2 + z + 2)}{(z^2 - 1)(z - 0.5)}$

7.2 求下列各式的变换:

① $e(t) = t \cdot \cos at$

② $e(t) = f(t) = t \cdot e^{-at}$

③ $e(t) = e^{-s} \sin at$

④ $E(s) = \frac{s+1}{s^3}$

7.3 求下列函数 $F(z)$ 的脉冲序列 $f^*(t)$:

① $F(z) = \frac{z^2}{(ze-1)^3}$

② $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)^2}$

③ $F(z) = \frac{z}{(z-1)(3z^2+1)}$

7.4 分别用部分分式法、幂级数法和留数法,求下列函数的反变换:

① $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

② $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)}$

7.5 用 Z 变换法求解差分方程:

$$C^*(t+2T) - 6C^*(t+T) + 8C^*(t) = \gamma^*(t) \quad (C^*(t) = 0, t \leq 0)$$

① $r(t) = \delta(t)$ 时; ② $r(t) = 1(t)$ 时, 其中 T 为采样周期, 要求结果以 $c(nT)$ 表示。

7.6 检验下列特征方程的根是否均位于单位圆内:

① $z^3 - 0.2z^2 - 0.25z + 0.05 = 0$ ② $z^4 - 1.7z^3 + 1.04z^2 + 0.268z + 0.024 = 0$

7.7 设线性离散系统如图 7-15 所示,

其中采样周期为 $T = 2s$ 。

(1) 求系统的闭环脉冲传递函数 $\frac{C(z)}{R(z)}$ 。

(2) 分析该系统的稳定性。

(3) 计算系统在单位阶跃输入作用下的稳态误差 $e(\infty)$ 。

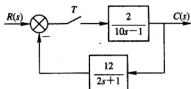


图 7-15

7.8 采样系统结构如图 7-16 所示。

(1) 判定系统的稳定性。

(2) 当输入 $r(t) = 1(t)$ 时求系统输出 $c^*(t)$ (只要求出前三次采样值) 和稳态误差。

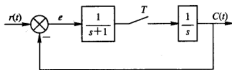


图 7-16

7.9 采样系统的结构如图 7-17 所示, 系统中的各采样开关同步, $T=1$ 。若要求闭环系统稳定, 试确定 K_1, K_2 的取值范围。

7.10 已知采样系统的结构如图 7-18 所示, 求

- (1) 系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$;
- (2) 讨论采样周期 T_s 的变化对系统稳定性的影响。

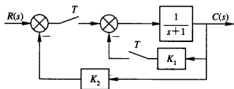


图 7-17

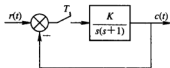


图 7-18

7.11 设某离散系统如图 7-19 所示, T 为采样周期。

- (1) 若 $K=10$, 确定使稳态误差 $e_s < \frac{1}{11}$ 时的 T 值范围 $\left[R(s) = \frac{1}{s}\right]$ 。
- (2) 证明: 若使系统稳定, 则 T 与 K 满足 $0 < T < \ln \frac{K+1}{K-1}$ 。

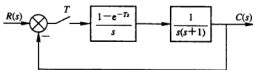


图 7-19

7.12 系统结构图如图 7-20 所示, T, T_1 为采样周期。

- ① 若 $T_1 = T$, 求出系统的脉冲传递函数 $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$, 写出基本推导过程。
- ② 若 $H(s) = 1, G_1(s) = 1, G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}, G_3(s) = 0, T_1 = 1 \text{ s}, T = 0, \gamma(t) = 1(t)$, 求 $e(T)$ 及系统的稳态误差 e_s 。

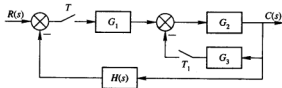


图 7-20

7.13 设有如图 7-21 所示系统, 其采样周期为 T_1 , 试求采样系统输出 $C(z)$ 的表达式。

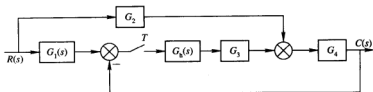


图 7-21

7.14 图 7-22 所示系统的采样周期为 $T = 1$ s。

① 确定系统稳定时的 K 值范围。

② 当 $K = 1$ 时系统输入 $r(t) = 1(t)$ ，求系统的稳态误差。

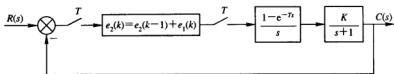


图 7-22

7.15 已知采样系统如图 7-23 所示，其中

$$G(z) = KT\gamma \frac{Z^{-1}(1 + \beta z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

设计 $D(z)$ 使系统对单位阶跃函数输入为无稳态误差的最小时间响应系统，并绘制 $e_1^*(t)$ 、 $e_2^*(t)$ 、 $X_n(t)$ 、 $C^*(t)$ 的波形图。

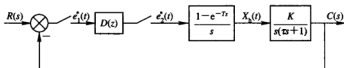


图 7-23

7.16 在图 7-24 所示系统中， $G_h(s)$ 为零阶保持器， $G_c(s) = \frac{1}{s+1}$ ， T 为采样周期。

① 设计数字控制器 $D(z)$ ，使系统在单位阶跃输入作用下为无稳态误差的最少拍系统。

② 设计后检验系统是否为输出无波纹系统。

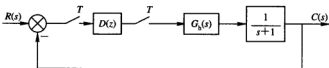


图 7-24

第 8 章 非线性系统分析

8.1 本章要求

(1) 掌握相轨迹的基本概念, 如奇点类型及其相应的大致形状等; 尤其是会画相轨迹, 对于解析法和作图法都应该熟悉。

(2) 能正确掌握描述函数法的应用前提; 会求典型非线性环节的描述函数; 尤其是会利用描述函数方法确定非线性系统的稳定性; 能求稳定自振时系统的振幅和频率。

8.2 基本概念

严格地讲, 所有实际物理系统都是非线性的, 总存在诸如死区、饱和、间隙等非线性现象。所谓线性系统只是在一定的工作范围和条件下, 非线性的影响非常小, 以至可以忽略时的一种近似。对于相当多的实际系统, 可以采用以上各章详细讨论的线性定常系统的分析和设计方法。但是也有一定数量的非线性问题不能近似地视为线性系统(如近似化的条件发生了变化、对系统性能要求的改变或提高等), 否则会导出错误的结论。这类问题只能采用其它的方法——非线性系统分析方法。

另外, 有时为了改善系统的性能或简化系统的结构, 还有意识地在线性系统中加入一些合理的非线性环节, 这往往可将系统的性能提高到线性系统不可能比拟的程度。这也是要研究非线性系统理论的一个重要原因。

1. 非线性系统的特征

描述线性系统运动状态的数学模型是线性微分方程, 其重要特征是可以应用叠加原理; 描述非线性系统运动状态的数学模型是非线性微分方程, 它不能应用叠加原理。由于两类系统的这种根本区别, 非线性系统与线性系统相比其运动规律有着本质的不同。概括如下:

(1) 稳定性: 线性系统的稳定性只取决于系统的结构和参数, 而和初始条件、外作用无关。非线性系统的稳定性不仅和系统的结构、参数有关, 而且和初始条件、外作用有着密切的关系。因此, 非线性系统不存在是否稳定的笼统概念, 只有一定条件下的稳定性而言。

(2) 运动形式: 线性系统的运动形式与输入信号的大小及初始条件无关。而非线性系统的运动形式与输入信号的大小及初始条件有关; 当输入信号的大小发生改变或初始条件发生变化时, 其运动形式可能发生改变, 如从单调变为振荡特性或从振荡变为单调特性等。

(3) 自持振荡: 线性定常系统只有在临界稳定的情况下, 才能产生周期运动, 而且这一周期运动是物理上不可能实现的。对于非线性系统, 在没有外界周期变化信号的作用

3. 非线性系统的分析方法

一般非线性系统的微分方程没有统一的求解方法,更不能像线性定常系统的微分方程那样得到由其齐次解加特解所构成的通解,只有一些近似的求解方法。应当强调的是,研究非线性系统并不一定需要求出其时域响应的精确解,通常我们着重关心的是时域响应的性质,如稳定性、自激振荡等。

非线性系统理论主要研究稳定性和自激振荡,以及如何利用非线性特性改善系统的性能。常用的分析方法是相平面法和描述函数法。

4. 相平面法

相平面法是一种时域图解方法。由于平面在几何上是二维的,因此它只适应于最高为二阶的系统。其实质是将一阶或二阶系统的运动过程形象地转化为平面(相平面)上一个点的移动,通过对这个点的移动轨迹(相轨迹)的研究来分析非线性系统的运动特性。

1) 相平面、相点、相轨迹及相平面图

设二阶系统的微分方程为 $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$, 令 $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$, 定义如下:

相平面: 以 $x(x_1)$ 为横坐标、 $\dot{x}(x_2)$ 为纵坐标所构成的一个二维(状态)空间。

相点: 在相平面上同一时刻 t 所对应的点 (x_1, x_2) 或 (x, \dot{x}) 。

相轨迹: 在相平面上相点沿时间 t 增加方向所形成的一条轨迹曲线。同一系统,一定的初始条件下只有一条相轨迹,不同的初始条件对应不同的相轨迹。

相平面图: 同一系统,在相平面上画出的全部初始条件下相轨迹所形成的曲线簇。

注意: 对于一阶系统,也可按上述定义构成相平面、相点、相轨迹和相平面图。

2) 普通点、奇点、奇点分类和极限环

相轨迹上任一点的斜率为: $\alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}}{x}$ 。

普通点: 指相轨迹上某点的斜率 α 为一个确定值时(即 \ddot{x} 和 \dot{x} 不同时为零)所对应的点。普通点只有一条相轨迹通过。

奇点: 指相轨迹上某点的斜率 α 为不确定值时(即 \ddot{x} 和 \dot{x} 同时为零)所对应的点。通过奇点的相轨迹不只一条。线性系统只有一个奇点,非线性系统可有多个奇点。显然,奇点也为系统的平衡点。奇点的求取,可通过令 $\dot{x} = 0$ 且 $\ddot{x} = 0$, 求出奇点的位置;此时斜率

$$\alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{0}{0} \text{ 为不定值,满足奇点要求。}$$

假如令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, 则得二阶系统的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

令 $\dot{x}_1 = 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$, 即可求出奇点 (x_{10}, x_{20}) 。

假设状态变量 x_1 、 x_2 的确定不是按式 $x_1 = x$ 和 $x_2 = \dot{x}$ 选择的,则此时对于一般情况的状态方程,可写出一般的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) \end{cases}$$

式中 $P(x_1, x_2)$ 和 $Q(x_1, x_2)$ 都是 x_1 和 x_2 的非线性函数。可令 $\dot{x}_1 = 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$, 即 $P(x_1, x_2) = 0$ 和 $Q(x_1, x_2) = 0$, 由这两个方程求出它们的交点便是奇点的坐标 (x_{10}, x_{20}) 。

需注意的是,相平面的坐标定义为 (x, \dot{x}) ,则状态变量一定要按 $x_1 = x$ 和 $x_2 = \dot{x}$ 确定。

根据奇点附近相轨迹的形状不同,或根据特征根在复平面上的位置不同,奇点分为六类:稳定焦点、不稳定焦点、稳定节点、不稳定节点、中心点及鞍点(见表 8.2)。

3) 极限环

非线性系统存在一种与线性系统截然不同的运动状态,即振荡状态。这在相平面上表现为一个孤立的封闭相轨迹。所有附近的相轨迹都渐近地趋向或离开这个封闭的相轨迹,这个封闭的相轨迹称为极限环。非线性系统可能没有极限环,也可能有一个或多个极限环。对于线性系统的中心点情况,其任一条封闭的相轨迹在其无穷小的附近就有无数条封闭的相轨迹;也就是说线性系统不存在孤立的封闭的相轨迹,也就不存在极限环。

极限环分为稳定极限环、不稳定极限环及半稳定极限环三种(见图 8-1)。极限环将相平面分为内部平面和外部平面,相轨迹不能从内部平面(或外部平面)直接穿过极限环而进入外部平面(或内部平面)。

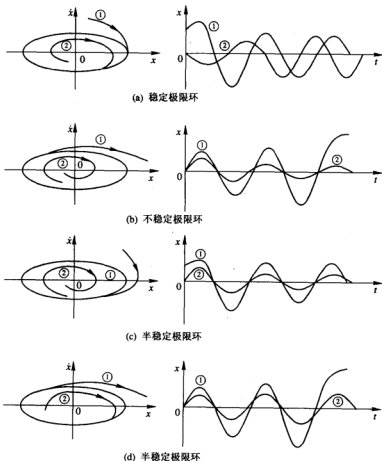


图 8-1 极限环

5. 描述函数法

描述函数法是非线性系统的频率方法,这是一种近似方法。它是假定系统输出的高次谐波的影响远小于一次谐波(基波),略去所有的高次谐波的影响,进而将非线性系统或环节特性线性化,用线性系统的频率分析方法来研究非线性系统。由于描述函数法是一种基于谐波等效线性化的分析方法,是线性系统频率分析方法的一种推广,它适用于具有低通滤波特性的各阶次的非线性系统,不受阶次限制,所得的结论也比较接近实际。

1) 描述函数定义

设非线性环节的输入信号为 $x(t) = A \sin \omega t$, 则其输出 $y(t)$ 是非正弦形式的周期信号,用傅里叶级数展开得:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

式中,
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t \, d(\omega t), \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t \, d(\omega t),$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

如果非线性特性是奇对称(中心对称)的,即 $A_0 = 0$, 且可忽略高次谐波分量的影响,则输出 $y(t)$ 可用基波分量来近似代替,即

$$y(t) \approx A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

上式表示非线性环节在正弦输入下,其输出近似是一个同频率的正弦输出,只是振幅和相角发生了变化。这与线性系统在正弦输入下的输出所表现的特性相似,故可用线性系统的频率分析方法去处理非线性环节(或系统)。由于这种分析方法是建立在输出 $y(t)$ 可用基波分量来近似代替的基础上的,因而称上述近似处理为谐波线性化。

仿照线性系统的频率特性定义,用一个复数来描述非线性环节正弦输入和输出基波的关系,即

$$N(A) = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1}$$

$N(A)$ 称为非线性环节的描述函数,又称为等效幅相特性。

若非线性环节不含储能元件,则其描述函数取决于输入正弦的幅值 A 和非线性环节本身的特性,而与频率 ω 无关。描述函数中的相移是由于非线性环节具有非单值特性形成的,与线性环节频率特性中的相移不能混为一谈。

描述函数 $N(A)$ 相当于把非线性环节等效成一个具有复放大系数的放大器。对于同一非线性环节,复放大系数仅与输入正弦幅值有关。

2) 描述函数法的应用前提

从描述函数的定义过程可知,对非线性环节进行谐波线性化,必须满足以下条件,否则,线性化后所得的结论与实际出入较大,甚至得出错误的结论。谐波线性化的条件是:

(1) $A_0 = 0$, 即非线性环节具有奇对称性;

(2) $Y_1 \gg Y_i, i = 2, 3, 4, \dots$, 即基波远大于高次谐波。当非线性系统具有低通滤波特性时,高次谐波才有可能远小于基波分量。

只有满足上述二条件,式 $y(t) \approx Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 才成立;非线性环节基于谐波线性化

后,用描述函数方法分析非线性系统的特性,才能较正确地反映实际情况。

需要指出的是:当系统中非线性元件的非线性程度非常明显,输出不能只考虑基波分量时(条件(2)不成立),不能应用描述函数法;当系统由非周期输入时(如阶跃、斜坡以及脉冲输入,条件(1)不成立),描述函数法也不能应用;即使可以应用描述函数法,描述函数所表示的非线性特性也是一种近似(式 $y(t) \approx Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 为近似关系),该方法得出的结论也是一种近似结论。

8.3 相平面法

1. 线性系统的相轨迹(奇点类型)

所有线性系统只有一个奇点;对于二阶线性系统 $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$, 其奇点为 $(0, 0)$, 此时斜率 $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x}{\dot{x}} = \frac{0}{0}$, 为不确定值。当输入不为零时,若系统微分方程为 $\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = M$, 其中 M 为常数,可取 $x = y - M/\omega_n^2$, 则系统微分方程仍可化为 $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$ 。

当 ξ 在不同取值范围内时,系统的特征根分布情况不同,就会产生不同的暂态过程形式。根据相轨迹的定义,在相平面上,可绘制出相应的相轨迹。表 8.2 列出了 ξ 在不同数值范围时的相轨迹形状。

2. 相轨迹特点、走向

除奇点外,由于通过 x 轴时,相轨迹斜率 $\alpha = \dot{x}/x = \infty$, 所以相轨迹是垂直通过 x 轴的。

在上半相平面,因 $\dot{x} > 0$, 所以上半相轨迹的走向是沿着 x 的增加方向,即由左至右。在下半相平面,因 $\dot{x} < 0$, 所以下半相轨迹的走向是沿着 x 的减小方向,即由右至左。总之,整个相轨迹表现为顺时针方向变化的特性。

3. 解析法绘制相轨迹

当系统的微分方程式比较简单时,就可用直接求解的方法找出 $x \sim \dot{x}$ 的函数关系,这样就可以在 $x \sim \dot{x}$ 相平面上直接画出相应的相轨迹。

若非线性系统的微分方程为 $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, 具体的解析方法有如下两种:

(1) 直接对 $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ 微分方程求解,得到 $x(t)$ 的表达式,再将 $x(t)$ 求导得到 $\dot{x}(t)$ 的表达式,然后消去 $x(t)$ 与 $\dot{x}(t)$ 之间的中间变量 t , 即可得到相轨迹方程 $\dot{x} = g(x)$ 。

(2) 因为 $\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}$, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, 所以 $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$ 。若变量 \dot{x} 能从函数 $f(x, \dot{x})$ 中分离出来,则可直接对上式积分便可得到相轨迹方程。

4. 图解法绘制相轨迹

图解法都是由系统初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 确定在相平面上的初始点后,用逐点延伸的方法依次画出时间 t 增加后的各个描述点的位置,按时间顺序依次连结这些点所形成的曲线就是相应的相轨迹。常用的图解法为等倾线法和圆弧近似法(δ 法),前者用直线延伸,后者用圆弧延伸。图解法的精度取决于作图的步长。

表 8.2 奇点性质

ξ 范围	极点分布	过程曲线	相平面图	奇点性质
$\xi < -1$				不稳定 节点
$-1 < \xi < 0$				不稳定 焦点
$\xi = 0$				中心点
$0 < \xi < 1$				稳定焦点
$\xi > 1$				稳定节点
正负实根各一个(相当于 $\alpha_0^* < 0$ 时, 或正反馈)				鞍点

1) 用等倾线法绘制相轨迹

用等倾线法绘制相轨迹的实质是用有限段足够短的直线逼近相轨迹,而这些短线的斜率等于相应位置的相轨迹斜率。

令 $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{x} = \text{常数}$, 则在相平面上, 斜率 α 相同的各点满足等倾线方程

$$\frac{f(x, \dot{x})}{x} = \alpha$$

满足上述方程的各点连线称为等倾线。用等倾线法绘制相轨迹的大致步骤如下:

(a) 在相平面上画出等倾线。注意: 等倾线本身有其斜率, 它与 α 有关, 但并非 α 。

(b) 在等倾线上画矢量, 矢量的斜率等于相轨迹的斜率 α 。该矢量表示相轨迹在通过等倾线时的方向。

(c) 确定初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 所位于的等倾线, 初始点 $(x(0), \dot{x}(0))$ 沿着该点所在的等倾线上的矢量方向变化, 用矢量方向的小线段代替相轨迹在该点的变化曲线; 找出小线段与其相邻的等倾线的交点, 再由这个交点出发, 按第二条等倾线上的矢量方向画小线段, 并交于第三条等倾线……, 依次连续下去, 可得一条以给定初始条件为起点的由各矢量组成的折线, 然后把这条折线光滑处理, 就得到了所要求的相轨迹。该作图法中, 小线段越短作图精度越高。

2) 用圆弧近似法绘制相轨迹

把式 $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ 改写成

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + (-\omega_n^2 - f(x, \dot{x})) = 0$$

令 $\delta(x, \dot{x}) = -\omega_n^2 - f(x, \dot{x})$, 则得

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \delta(x, \dot{x}) = 0$$

在点 (x, \dot{x}) 附近小领域中, 将 $\delta(x, \dot{x})$ 视为常数, 并将上式对 x 进行积分得:

$$\dot{x}^2 + \omega_n^2 x^2 + 2\delta(x, \dot{x})x = \text{常数}$$

将该式改写为

$$\dot{x}^2 + \left(\omega_n x + \frac{\delta}{\omega_n}\right)^2 = R^2$$

如果选取新坐标系为 $(\omega_n x, \dot{x})$, 则在新坐标系中以圆心为 $\left(-\frac{\delta}{\omega_n}, 0\right)$ 、半径为从圆心到所取点 $(\omega_n x, \dot{x})$ 的距离画出圆弧, 就近似地表示了所选取点附近的相轨迹。因此相轨迹就可用一段小圆弧连接而成。具体步骤如下:

(1) 由初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$, 可求出初始点 $(x(0), \dot{x}(0))$ 所对应的 δ_0 以及圆心 $\left(-\frac{\delta_0}{\omega_n}, 0\right)$; 以该圆心到初始点的距离为半径沿顺时针方向画一小圆弧, 用该小圆弧代替该点附近的相轨迹, 并将小圆弧的终点作为下一小圆弧的起点。

(2) 以上一小圆弧的终点作为新的初始点, 计算出新的 δ_i 以及圆心 $\left(-\frac{\delta_i}{\omega_n}, 0\right)$; 以该圆心到新初始点的距离为半径沿顺时针方向画一小圆弧, 并以新小圆弧的终点作为下一小圆弧的起点, 依次连续下去, 可得由小圆弧连接而成的相轨迹。

显然每次取的小圆弧越小, 精度越高。

5. 分段线性的非线性系统处理

对于可以用分段线性来表示的非线性系统,可用“分区”处理的方法。具体步骤如下:

(1) 首先根据非线性特性的线性分段情况,用几条转换线(开关线)把相平面分成几个线性区域,在各个线性区域内,各自用一个线性微分方程来描述。

(2) 画出各线性区的相轨迹。

(3) 根据系统状态变化的连续性,将相邻区域的相轨迹连成连续的曲线,该曲线即是整个非线性系统的相轨迹。

6. 由相轨迹求时间

1) 用面积法求时间 t_{AB}

因为 $\dot{x} = dx/dt$, 所以 $dt = dx/\dot{x}$, 将其积分,可以得到系统从状态 A 运动到 B 所需的时间:

$$t_{AB} = t_A - t_B = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{\dot{x}} dx$$

时间 t_{AB} 为图 8-2 中剖面线所示区域的面积。

2) 根据相轨迹的平均斜率求时间 t_{AB}

$$t_{AB} \approx \frac{x_B - x_A}{\dot{x}_{AB}}$$

式中 \dot{x}_{AB} 为 A 点到 B 点的平均值,即 $\dot{x}_{AB} = (\dot{x}_A + \dot{x}_B)/2$ 。

7. 相平面分析法

图 8-2 由相轨迹求时间

上面介绍了如何绘制二阶系统的相平面图,以及如何由相平面图求系统的过渡过程的方法。用相平面方法分析非线性系统的一般步骤如下:

首先选择状态变量 x_1 和 x_2 并令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, 得到状态方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$ 。

其次令 $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, 得到奇点的位置,并用解析法或图解法绘制相轨迹。

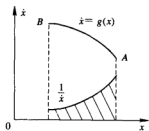
最后,将某奇点附近的相轨迹与二阶线性系统的相轨迹进行比较,若该奇点附近的相轨迹与某二阶线性系统的相轨迹类似,则非线性系统在该奇点附近所表现的特性与其相类似的二阶线性系统奇点的特性相同,即表现上述六类奇点(稳定焦点、不稳定焦点、稳定节点、不稳定节点、中心点及鞍点)之一特性。

关于用相轨迹判断非线性系统的性能,总结如下:

(1) 当系统的相轨迹从任一初始状态开始,随着时间的推移,相轨迹按顺时针方向延伸,最后能收敛于该系统的奇点,则此非线性系统稳定。如果系统非线性环节的特性存在死区,则稳定的非线性系统的相轨迹将收敛于此死区的范围内。

(2) 当系统的相轨迹从任一初始状态开始,按顺时针方向延伸,并逐渐向外发散远离于奇点,则此非线性系统不稳定。

(3) 当系统的相轨迹从任一初始状态开始,按顺时针方向延伸,或逐渐向内收缩,或逐渐向外发散,但最终都终结于相平面上的某一孤立封闭曲线上,则此非线性系统必存在自持振荡。将封闭曲线称为极限环。当相轨迹出现稳定的极限环时,此非线性系统的时域响应必出现自持振荡。



多数情况下, 极限环只有一个, 但是某些非线性系统也可能有多于一个的极限环。

8. 有外作用时相轨迹的研究

一般情况, 当系统无外界输入时, 系统的平衡位置(奇点)在相平面的坐标原点。

当有外作用时, 若仍以系统的输出量及其导数作为相坐标, 则该系统的奇点(平衡位置)一般不在相平面的坐标原点, 有时甚至不是定值。在这种情况下, 常取偏差 e 及其导数 \dot{e} 做为相坐标。

一般情况下, $e(\infty) = 0$ 或为常数, 这就回避了因平衡位置不在相平面原点或为不确定时产生的诸多不便。平衡位置与坐标原点的水平距离表明了稳态误差的大小。具体作法是将原系统微分方程进行变量置换。

设输入量为 $r(t)$, 输出量为 $c(t)$, $e(t) = r(t) - c(t)$, 则有 $\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{c}(t)$ 。

因为一般情况系统输出端在初始时刻处于平衡位置, 即 $c(0) = 0$, $\dot{c}(0) = 0$, 所以 $e(0) = r(0)$, $\dot{e}(0) = \dot{r}(0)$ 。将上述关系带入原系统微分方程, 便可得到以偏差 $e(t)$ 为变量的微分方程和相应的初始条件。

8.4 描述函数法

描述函数法是一种近似方法, 只有系统中线性部分的惯性时间常数较大, 而且又没有串联的比例微分环节, 也就是说系统具有较好的抑制谐波分量的性能时, 使用此法分析才有较高的准确度。反之, 误差就比较大。

若非线性环节的特性是中心对称的, 在正弦输入下, 则其输出的恒值分量为零, 但其输出不一定都是奇函数; 同时输出的基波幅值远大于高次谐波的幅值。在满足这两个条件下, 描述函数法在非线性的系统中主要用来分析非线性系统的稳定性, 以及确定非线性系统在正弦函数作用下的输出特性。

描述函数 $N(A)$ 的求法见基本概念部分。为了便于在工程中的应用, 常用相对描述函数的概念, 即将描述函数中某些非线性参数分离出来归到线性部分中去, 而剩下的非线性参数均以相对值的形式出现。相对描述函数记作 $N_r(A/d)$, 它与描述函数之间的关系为:

$$N(A) = K_n \cdot N_r \frac{A}{d}$$

式中 K_n 及 d 均为表征非线性特性的参数。

在实际应用中又常用负倒相对描述函数 $-\frac{1}{N_r(A/d)}$ 或负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A/d)}$ 。

1. 典型非线性环节的描述函数

表 8.3 中 A 为非线性环节的正弦输入信号的振幅, 从表中可以看出, 一般要求 $A > a$, 此时非线性环节才表现出非线性特性, 否则虽然该环节为非线性的, 但没有表现出非线性特性。另外, 表中所绘制的负倒相对描述函数与负倒描述函数曲线形状相同, 它们之间仅相差 K_n 倍; 将负倒相对描述函数曲线缩小 $1/K_n$ 就是负倒描述函数曲线。

表 8.3 典型非线性环节的描述函数

名称	非线性特性	相对描述函数 $N(A)$	负倒相对描述函数 $-\frac{1}{N_o}$
死区 (不灵敏区)		$N_o = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A} \right)^2} \right]$ 其中: $K_n = \operatorname{tg} \beta$, $A > \Delta$	
饱和特性		$N_o = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right]$ 其中: $K_n = \operatorname{tg} \beta$, $A > a$	
间隙 (回环)		$N_o = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin x + 2x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right] + j \frac{4a}{\pi A} \left(\frac{a}{A} - 1 \right), \quad x = 1 - \frac{2a}{A}$ 其中: $K_n = \operatorname{tg} \beta$, $A > a$	
继电器特性		$N_o = \frac{2a}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{A} \right)^2} \right] + j \frac{4a^2}{\pi A^2} (m-1)$ 其中: $K_n = M/a$, $A > a$	
理想继电器		$N_o = \frac{4M}{\pi A}$ 其中: $K_n = 1$	
带死区继电器		$N_o = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2}$ 其中: $K_n = M/a$, $A > a$ 当 $A = \sqrt{2}a$ 时出现极值点为 $N_o = \frac{2}{\pi}$	
滞环继电器		$N_o = \frac{4a}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} - j \frac{4a^2}{\pi A^2}$ 其中: $K_n = M/a$, $A > a$. 其负倒相对描述函数的虚部为定值 $-j \frac{\pi}{4}$	

2. 非线性环节的串并联等效

串并联等效就是将多个非线性环节串联或并联后的特性等效为一个非线性环节的特性。

1) 非线性环节串联

两个非线性环节串联, 可将两个环节的特性归化为一个特性, 即以第一个非线性环节的输入为归化后的非线性部分的输入, 以第二个非线性环节的输出为归化后的非线性部分的输出。串联的非线性环节次序不可交换。一般地说, 不能用两个串联的非线性环节描述函数相乘得到等效的非线性特性的描述函数, 也就是说, 若两个非线性环节的描述函数分别为 $N_1(x)$ 和 $N_2(x)$, 等效后的描述函数为 $N(x)$, 则在一般情况下, $N(x) \neq N_1(x) \cdot N_2(x)$ 。

用同样的方法, 可依次求出多个串联非线性环节的描述函数。

2) 非线性环节并联

r 个非线性环节并联后的描述函数并不等于各非线性环节的描述函数的代数和, 而是矢量和。若 r 个非线性环节的描述函数都是实数, 则等效的非线性特性的描述函数等于各非线性环节的描述函数的代数和。

则等效的非线性特性的描述函数为:

$$N = \frac{1}{X} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^r A_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^r B_i\right)^2} \angle \arctan \frac{\sum_{i=1}^r A_i}{\sum_{i=1}^r B_i}$$

一般情况下, 假定第 i 个非线性环节的描述函数为:

$$N_i = \frac{1}{X} \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \angle \arctan \frac{A_i}{B_i}$$

3. 描述函数分析法

在线性系统的频率分析法中, 用开环频率特性 $G(j\omega)$ 对复平面上 $(-1, j0)$ 点的包围情况, 可以分析闭环的稳定性和性能; $(-1, j0)$ 点起着一个临界点的作用。将线性系统的频率分析方法在非线性系统中推广, 就是用非线性系统中的线性部分的频率特性相对于一条临界曲线(即负倒描述函数 $-1/N(A)$) 的相对关系来判断非线性系统的稳定性。

假设非线性系统的框图如图 8-3, 其中 $N(A)$ 是非线性环节的描述函数, $G(s)$ 是线性部分的传递函数。则该系统的特征方程为:

$$1 + N(A)G(s) = 0$$

令 $s = j\omega$, 得 $1 + N(A)G(j\omega) = 0$, 即

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

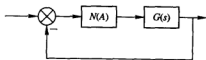


图 8-3 非线性系统的框图

同线性系统的 $G(j\omega) = -1$ 式比较, 可知上式就是非线性系统稳定性的判别式。

设线性部分传递函数 $G(s)$ 中有 p 个不稳定的极点。下面给出用奈奎斯特稳定判据判断非线性系统稳定性和确定系统是否存在自激振荡的若干结论。

(1) 若 $G(j\omega)$ 曲线逆时针包围整个负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线 $p/2$ 圈, 则该非线性系统是稳定的, 如图 8-4(a), 否则该非线性系统不稳定, 如图 8-4(b)。

(2) 若 $G(j\omega)$ 曲线与负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线没有交点, 则系统不存在周期运动解。

(3) 若 $G(j\omega)$ 曲线与负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线有交点, 如图 8-4(c), 则非线性系统处于临界状态, 对应着系统存在近似于正弦的周期运动解 $x(t) = A \sin \omega t$ 。交点处的参数 A 、 ω 分别为周期运动的振幅和频率。其振幅由 $-1/N(A)$ 上交点处对应的 A 值决定, 频率则由 $G(j\omega)$ 上交点处对应的 ω 值决定。若该周期运动是稳定的, 则系统存在自激振荡。

(4) 当 $G(j\omega)$ 曲线与负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线有交点, 而且被 $G(j\omega)$ 包围的 $-1/N(A)$ 部分所对应的振幅 A 值小于交点另一侧未被 $G(j\omega)$ 包围的 $-1/N(A)$ 部分所对应的振幅 A 值时, 则此交点对应的周期运动即为系统稳定的自激振荡, 如图 8-4(c) 中 a 点; 否则为不稳定的周期运动, 如图 8-4(c) 中 b 点, 该情况下周期运动的振幅最后收敛到零为止。

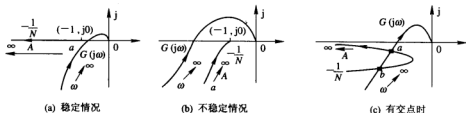


图 8-4 判别非线性系统的稳定性

(5) 当 $p = 0$ 即线性部分 $G(s)$ 为最小相位系统时, 结论是: 若 $G(j\omega)$ 曲线不包围负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线, 则该非线性系统是稳定的; 若 $G(j\omega)$ 曲线包围负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线, 则该非线性系统不稳定。当 $G(j\omega)$ 曲线与负倒描述函数 $-1/N(A)$ 曲线相交时, 则存在周期运动; 若交点处 $-1/N(A)$ 曲线向 $G(j\omega)$ 曲线包围的区域外移动, 则该交点对应的周期运动就是自激振荡。

总之, 用描述函数法分析非线性系统的性能的步骤如下:

(1) 利用非线性环节串并联等原则和将各线性部分合并为一个等效部分, 将非线性系统化为如图 8-3 所示的典型结构图。

(2) 由定义或查表得到非线性部分的描述函数 $N(A)$ 。

(3) 在复平面上作出 $-1/N(A)$ 曲线和 $G(j\omega)$ 曲线。

(4) 判断系统是否稳定, 是否存在周期运动。

(5) 如果系统存在周期运动, 进一步分析周期运动的稳定性; 若稳定, 确定它的频率和振幅。

8.5 例题讲解

本章主要有两方面的内容，一是会画相轨迹，并根据相轨迹确定有关特性；二是能用描述函数，确定系统的稳定性，会求稳定自振时的振幅和频率。

例 8.1 试画出图 8-5 的非线性环节串联或并联后的等效非线性特性。

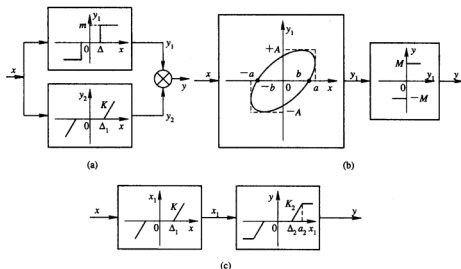


图 8-5

解 (1) 非线性特性的并联，因其输出为每个非线性特性输出的叠加(加或减)，因而其等效非线性特性就是每个非线性特性的纵坐标的叠加。图 8-5(a)等效的非线性特性见图 8-6(a)。

注意：根据描述函数的定义，并联等效非线性的描述函数等于各非线性特性描述函数的矢量和。因而，有时将复杂的非线性特性分解为几个典型非线性特征的并联，以简化求其描述函数的过程。

(2) 非线性特性的串联，是将前一特性的输出作为后一特性的输入；第一个特性的输入作为等效后非线性特性的输入，最后一个特性的输出作为等效后非线性特性的输出。可采用图解法进行简化。等效后的非线性特性见图 8-6(b)和(c)。

在图(c)中，当 $|x_1| \leq \Delta_2$ 时， $y = 0$ ； $x_1 = \Delta_2$ 所对应的 x 为 $x = \Delta_1 + \Delta_2/K_1$ ；所以等效后 $a = \Delta_1 + \Delta_2/K_1$ 。当 $|x_1| \geq a_2$ 时， $y = K_2(a_2 - \Delta_2)$ ， $x_1 = a_2$ 所对应的 x 为 $x = \Delta_1 + \frac{a_2}{K_1}$ ；所以等效后 $a = \Delta_1 + \frac{a_2}{K_1}$ ， $M = K_2(a_2 - \Delta_2)$ 。在 $\Delta_2 \leq |x_1| \leq a_2$ 时， $y = K_2(x_1 - \Delta_2)$ ， $\Delta_2 \leq |x_1| \leq a_2$ 与所对应的 x 的关系为 $x_1 = K_1(x - \Delta_1)$ ，则

$$y = K_2(K_1(x - \Delta_1) - \Delta_2) = K_1 K_2(x - (\Delta_1 + \Delta_2/K_1)) = K_1 K_2(x - \Delta)$$
所以等效后 $K = K_1 K_2$ 。

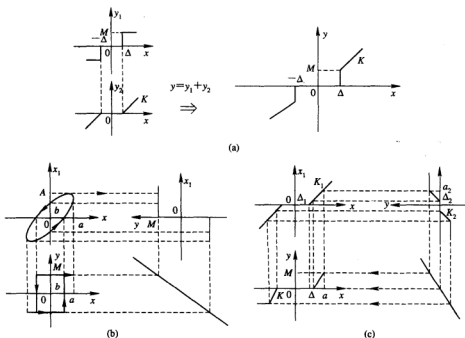


图 8-6

注意：非线性特性串联时注意每个非线性特性所处的位置，也就是说串联的等效非线性特性不仅取决于所串联的非线性特性，还取决于每个特性在串联中的前后次序。调换次序则等效非线性特性亦发生改变。另外等效后的描述函数并不等于串联的各非线性特性描述函数的乘积，应按等效后非线性特性进行计算。

例 8.2 将图 8-7 所示非线性系统简化成典型结构形式，并写出线性部分的传递函数 $G(s)$ 。

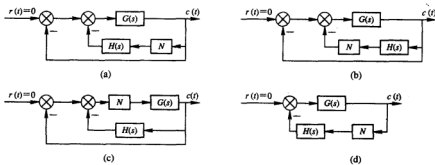


图 8-7

解 (1) 图 8-7(a)简化过程如图 8-8(a); 等效后线性部分的传递函数为 $\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)}$ 。

(2) 图 8-7(b)简化过程如图 8-8(b); 等效后线性部分的传递函数为 $\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)}$ 。

(3) 图 8-7(c)简化过程如图 8-8(c); 等效后线性部分的传递函数为 $G(s)[1+H(s)]$ 。

(4) 图 8-7(d)简化过程如图 8-8(d); 等效后线性部分的传递函数为 $G(s)H(s)$ 。

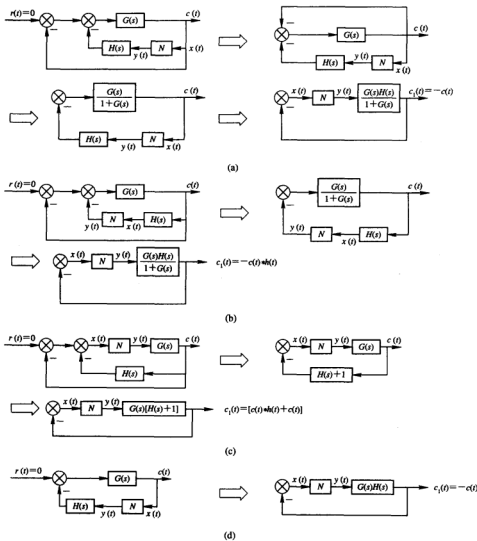


图 8-8

例 8.3 试求图 8-9 所示非线性环节的描述函数。

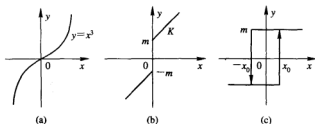


图 8-9

解 (1) 图(a)中设输出信号为 $x(t) = A \sin \omega t$, 因为 $y = x^3$, 且单值奇对称, 故

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t \, d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A^3 \sin^4 \omega t \, d\omega t = \frac{3}{4} A^3$$

则描述函数为

$$N(A) = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{3}{4} A^2$$

(2) 图(b)可看成两个环节的并联, 见图 8-10。则

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A) = \frac{4M}{\pi A} + K$$

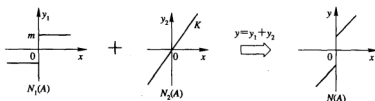


图 8-10

(3) 图 8-11 中 $\theta_0 = \arcsin \frac{x_0}{A}$, 其输出特性与理想继电的特性在相位上滞后一个角度

$\theta_0 = \arcsin \frac{x_0}{A}$, 因此其描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} < \arcsin \frac{x_0}{A} = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A}\right)^2} - j \frac{4Mx_0}{\pi A^2} \quad (A \geq x_0)$$

或按定义计算:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} (-M) \cos \omega t \, d\omega t + \int_{\theta_0}^{\pi} M \cos \omega t \, d\omega t \right] \\ &= \frac{4}{\pi} M \sin \theta_0 = -\frac{4Mx_0}{\pi A} \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t \, d\omega t = \frac{4M}{\pi} \cos \theta_0 = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A}\right)^2}$$

所以

$$N(A) = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A}\right)^2} - j \frac{4Mx_0}{\pi A^2}$$

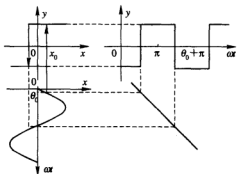


图 8-11

例 8.4 已知非线性系统的微分方程为 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$ ，试确定系统奇点的类型。

解 令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ ，得非线性系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0.5x_2 - x_1^2 = Q(x_1, x_2) \end{cases}$$

令 $P(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) = 0$ ，可以求出系统的奇点共有两个，即

$$\begin{cases} x_1 = x = 0 \\ x_2 = \dot{x} = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = x = -2 \\ x_2 = \dot{x} = 0 \end{cases}$$

为判断奇点的类型，需先对非线性微分方程在奇点附近进行线性化处理，然后求出线性化后的微分方程的特征值，再根据特征值的性质判断奇点的类型。

(1) 对于奇点 $(0, 0)$ ，线性化后的状态方程为：

$$\begin{cases} (x_1 - x_{1e})' = a(x_1 - x_{1e}) + b(x_2 - x_{2e}) \\ (x_2 - x_{2e})' = c(x_1 - x_{1e}) + d(x_2 - x_{2e}) \end{cases}$$

其中

$$a = \left. \frac{\partial P}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} = 0, \quad b = \left. \frac{\partial P}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} = 1, \quad c = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right|_{(0,0)} = -2, \quad d = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right|_{(0,0)} = -0.5$$

即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0.5x_2 \end{cases}$$

相应的非线性微分方程线性化为：

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$$

也可用下面方法进行线性化处理：

令 $x_1 = y_1 + x_{1e} = y_1$ 和 $x_2 = y_2 + x_{2e} = y_2$ ，代入状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0.5x_2 - x_1^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_1 - 0.5y_2 - y_1^2 \end{cases}$$

忽略高次项可得线性化后的状态方程同前式。

由于线性化后微分方程为 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$ ，其特征值为 $-0.25 \pm j1.39$ （因为特征值均为具有负实部的共轭复数），故奇点 $(0, 0)$ 是稳定焦点。其在奇点 $(0, 0)$ 附近的相轨迹见表 8-2。

(2) 对于奇点 $(-2, 0)$ ，线性化后的状态方程为：

$$\begin{cases} (x_1 - x_{1e})' = a(x_1 - x_{1e}) + b(x_2 - x_{2e}) \\ (x_2 - x_{2e})' = c(x_1 - x_{1e}) + d(x_2 - x_{2e}) \end{cases}$$

其中

$$a = \left. \frac{\partial P}{\partial x_1} \right|_{(-2, 0)} = 0, b = \left. \frac{\partial P}{\partial x_2} \right|_{(-2, 0)} = 1, c = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right|_{(-2, 0)} = 2, d = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right|_{(-2, 0)} = -0.5$$

即

$$\begin{cases} (x_1 + 2)' = (x_2 + 0) \\ (x_2 + 0)' = 2(x_1 + 2) - 0.5(x_2 + 0) \end{cases}$$

令 $y = y_1 = x + 2$ 和 $y_2 = \dot{y}_1$ ，则上式改写为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 0.5y_2 \end{cases}$$

相应的非线性微分方程线性化为：

$$\ddot{y} + 0.5\dot{y} - 2y = 0$$

也可用下面方法进行线性化处理：

令 $x_1 = y_1 + x_{1e} = y_1 - 2$ 和 $x_2 = y_2 + x_{2e} = y_2$ ，代入状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 0.5x_2 - x_1^2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 0.5y_2 - y_1^2 \end{cases}$$

忽略高次项即可得线性化后的状态方程同前式。

由于线性化后微分方程为 $\ddot{y} + 0.5\dot{y} - 2y = 0$ ，其特征值为 -1.69 和 1.19 ；因为特征值均为实数，且一个为负实根，一个为正实根，故奇点 $(-2, 0)$ 是鞍点。其在奇点 $(-2, 0)$ 附近的相轨迹见表 8-2。

例 8.5 图 8-12 所示为具有饱和和非线性元件的控制系统。系统原来处于静止， $K = 4$ ， $e_0 = 0.2$ ， $m = 0.2$ ，试在 $e - \dot{e}$ 平面上分别画出输入信号为 $r(t) = R_0 \cdot 1(t)$ 时系统的相轨迹。

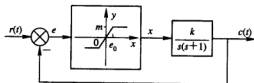


图 8-12

解 非线性环节的特性为

$$\begin{cases} x = e & |e| < 0.2 \\ x = 0.2 & e > 0.2 \\ x = -0.2 & e < -0.2 \end{cases}$$

线性部分的微分方程为

$$\ddot{c} + \dot{c} = 4x$$

因为 $e = r - c$, $\dot{e} = \dot{r} - \dot{c}$ 及 $\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{c}$, 所以系统的误差微分方程为

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4e = \ddot{r} + \dot{r}$$

$r(t) = R_0 \cdot 1(t)$ 时, $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, 有

$$\ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0$$

a) $|e| < 0.2$ 时, 有 $\ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0$, 奇点位置为 $(0, 0)$ 。

由于奇点位于本区域内, 故它是实奇点, 且系统在本区域内的两个特征根是一对具有负实部的共轭复数, 因此, 奇点是稳定焦点。在本区域内的相轨迹是一条按对数螺旋形式卷向坐标原点(奇点)的曲线。

b) 当 $e > 0.2$ 时, 有 $\ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0$, 本区域不存在奇点。其等倾线方程为: $\alpha = \frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{\dot{e} + 0.8}{e}$, 故有 $\dot{e} = -\frac{0.8}{1 + \alpha}$ 。

显然, 当 $\alpha = 0$ 时, 可求得全部相轨迹都渐近于直线 $\dot{e} = -0.8$; 由 $\alpha = 0$ 所求得的直线为相轨迹的渐近线, 它本身就是一条等倾线, 且这条等倾线的斜率等于 α 。

c) $e < -0.2$ 的区域, 有 $\ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0$, 它与 $e > 0.2$ 的区域相同; 本区域内不存在奇点。其等倾线方程为 $\alpha = \frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{\dot{e} + 0.8}{e}$, 即 $\dot{e} = \frac{0.8}{1 + \alpha}$, 渐近线方程为 $\dot{e} = 0.8$, 故本区域内的相轨迹将趋向于该渐近线。

根据以上分析可知, $e = \pm 0.2$ 为开关线, 在 $|e| < 0.2$ 区域表现稳定焦点的特性, 在 $e > 0.2$ 或 $e < -0.2$ 区域, 可先在区域内画出渐近线, 然后按照渐近线的位置大致画出相轨迹的图形, 见图 8-13。由于相轨迹收敛于坐标原点, 故系统稳定, 且稳态误差为零。

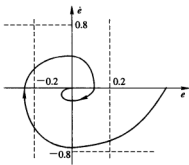


图 8-13

例 8.6 图 8-14 表示了带有非线性反馈增量的二阶系统, 设 $K = 1$, $J = 5$, $a = 1$, 试在 $e - \dot{e}$ 平面上画出系统在阶跃输入时的相轨迹。

解 对于阶跃输入有 $r(t) = \text{常数}$, $\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$ 。

(1) $|\dot{c}| < a$ 即 $|\dot{e}| < a$ 时, $b = \dot{c}$, $m = e - b = e - \dot{c}$, $J\dot{c} = Km$, 得

$$J\dot{c} + K\dot{c} = Ke$$

因为 $e = r - c$, 所以 $\dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = -\dot{c}$, $\ddot{e} = \ddot{r} - \ddot{c} = -\ddot{c}$, 代入上式得系统的误差微分方程为

$$J\ddot{e} + K\dot{e} + Ke = 0$$

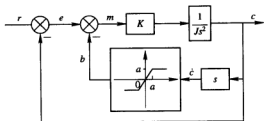


图 8-14

(2) $\dot{c} > a$ 即 $\dot{e} < -a$ 时,

$$b = a, \quad J\ddot{c} = Km = K(e - a)$$

因为 $\ddot{e} = -\ddot{c}$, 故有

$$J\ddot{c} + Ke = Ka$$

(3) $\dot{c} < -a$ 即 $\dot{e} > a$ 时, $b = -a$, 则

$$J\ddot{c} = Km = K(e + a)$$

故有

$$J\ddot{c} + Ke = -Ka \quad (\dot{e} > a)$$

将 K, J, a 的值代入上述方程式可得:

$$\begin{cases} \ddot{e} + 5e = -5 & \dot{e} > 1 \\ \ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0 & |\dot{e}| < 1 \\ \ddot{e} + 5e = 5 & \dot{e} < -1 \end{cases}$$

开关线(转换线)为 $\dot{e} = \pm 1$ 。

a) 当 $\dot{e} > 1$ 时有

$$\begin{aligned} \ddot{e} + 5e &= -5 \rightarrow \dot{e} \, de + 5e \, de + 5 \, de \\ &= 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2} \dot{e}^2 + \frac{5}{2} e^2 + 5e \right) \Big|_{t=0}^t = 0 \end{aligned}$$

由此得

$$\dot{e}^2 + 5e^2 + 10e = \dot{e}^2(0) + 5e^2(0) + 10e(0)$$

$$\dot{e}^2 + 5(e+1)^2 = \dot{e}^2(0) + 5e^2(0) + 10e(0) + 5 = A$$

则

$$\frac{\dot{e}^2}{A} + \frac{(e+1)^2}{A/5} = 1$$

这表明在 $e-\dot{e}$ 平面上此区域为椭圆, 中心点坐标为 $(-1, 0)$; 或令 $x = \sqrt{5}e, y = \dot{e}$, 上式改为 $y^2 + (x + \sqrt{5})^2 = A$, 因此在 $x-y$ 平面上在 $y > 1$ 的区域内相轨迹为以 $(-\sqrt{5}, 0)$ 为圆心的圆, 此时开关线仍为 $\dot{e} = y = \pm 1$ 。

b) 当 $\dot{e} < -1$ 时, 有 $\ddot{e} + 5\dot{e} = 5$; 同理可求得

$$\frac{\dot{e}^2}{A} + \frac{(e-1)^2}{A/5} = 1 \quad \text{或} \quad y^2 + (x+\sqrt{5})^2 = A$$

故在 $x-y$ 平面上, $y < -1$ 区域内相轨迹为以 $(-\sqrt{5}, 0)$ 为圆心的圆。

c) 在 $|e| < 1$ 的区域有 $\ddot{e} + 5\dot{e} + 5e$, 其奇点为原点, 且为稳定节点; 在该区域内的相轨迹是按抛物线的形式收敛于坐标原点(相轨迹见图 8-15)。

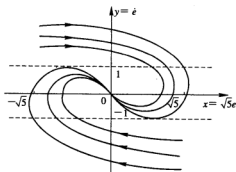


图 8-15

例 8.7 图 8-16 所示为带速度反馈的非线性系统, 系统原来处于静止状态 $0 < \beta < 1$, $r(t) = -R \cdot 1(t)$, ($R > a$), 试分别画出有速度反馈和没有速度反馈时系统的相轨迹。

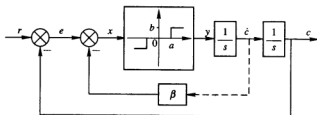


图 8-16

解 (1) 没有速度反馈 ($\beta = 0$) 时, $x = e$, 系统线性部分微分方程为 $\ddot{c} = y$ 。根据非线性特征, 有

$$\begin{cases} \ddot{c} = 0 & |e| < a \\ \ddot{c} = b & e > a \\ \ddot{c} = -b & e < -a \end{cases}$$

因为 $e = r - c$, 所以 $\dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = -\dot{c}$, $\ddot{e} = -\ddot{c}$, 系统的误差微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} = 0 & |e| < a \\ \ddot{e} = -b & e > a \\ \ddot{e} = b & e < -a \end{cases}$$

开关线(转换线) $e = a$ 和 $e = -a$ 把 $e - \dot{e}$ 平面分成三个区域, 因初始时系统处于静止, 即

$$\dot{e}(0) = 0, e(0) = r(0) - 0 = -R$$

① 当 $e < -R$ 时, 有 $\ddot{e} = b$, 由此得

$$\frac{1}{2}(\dot{e})^2 = b[e - e(0)] = b(e - A) = b(e + R)$$

其中 A 为与初始条件有关的常数。在 $e < -a$ 区域内, 相轨迹为开口向右且对称于 e 轴的抛物线。系统的相轨迹见图 8-17。

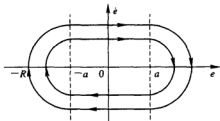


图 8-17

② 当 $|e| < a$ 时, 有 $\ddot{e} = 0$, 由此得 $\dot{e} = \pm A$, 其中 $A = \sqrt{2b(k-a)}$ 为与初始条件有关的常数。在 $|e| < a$ 区域内相轨迹为水平线。

③ 当 $e > a$ 时, 有 $\ddot{e} = -b$, 由此得

$$\frac{1}{2}(\dot{e})^2 = -b(e + A), \quad A = \sqrt{2b(k-a)}$$

其中 A 为与初始条件有关的积分常数。在 $e > a$ 区域内相轨迹为开口向左且对称于 e 轴的水平线。

系统的相轨迹见图 8-17。

(2) 有速度反馈时 ($0 < \beta < 1$), 有

$$\ddot{x} = e - \beta \dot{e} = e + \beta \dot{e}$$

同理可得系统的误差微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} = 0 & |e + \beta \dot{e}| < a \\ \ddot{e} = -b & e + \beta \dot{e} > a \\ \ddot{e} = b & e + \beta \dot{e} < -a \end{cases}$$

① 当 $e + \beta \dot{e} < -a$ 时, $\ddot{e} = b$, 因而得 $\frac{1}{2}(\dot{e})^2 = -b(e + A_1)$ 。

② 当 $|e + \beta \dot{e}| < a$ 时, $\ddot{e} = 0$, 因而得 $\dot{e} = A_2$ 或 $\dot{e} = -A_3$ 。

③ 当 $e + \beta \dot{e} > a$ 时, $\ddot{e} = -b$, 因而得 $\frac{1}{2}(\dot{e})^2 = -b(e - A_4)$ 。

以上 A_1, A_2, A_3, A_4 是与初始条件有关的常数。开关线方程为 $e + \beta \dot{e} = \pm a$, 其斜率为 $-\frac{1}{\beta}$, 在横轴上的截距分别是 $+a$ 及 $-a$ 的斜线, 这两条开关线把平面 $G(j\omega)$ 分成三个区

域。由于三个区域的微分方程与没有速度反馈时相应的区域内的微分方程相同，故它的相轨迹方程也是一一对应的，所不同的是两种情况下相轨迹与开关线相交的时间不同（即转换的时间不同），见图 8-18。由于 $\beta > 0$ 时的开关线相对于 $\beta = 0$ 时的开关线按照逆时针方向转过 $\varphi = \tan\beta$ 角，使相轨迹转换的时间提前，转换时相轨迹运动的速度减小，因此，使系统由原来的等幅振荡（ $\beta = 0$ 时）变成收敛振荡，系统的性能得到改善。

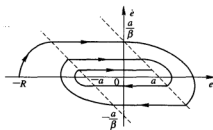


图 8-18

例 8.8 图 8-19 所示为非线性控制系统，图中 N 表示非线性放大器，其静特性如图所示，系统开始处于静止状态，试在 $G(j\omega)$ 平面画出在下述输入作用下的相轨迹，输入为阶跃函数 $r(t) = R \cdot 1(t)$ （已知 $kK < \frac{1}{4T} < K$ ）。

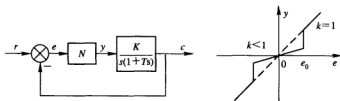


图 8-19

解 系统线性部分的微分方程为

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Ky$$

因为 $e = r - c$ ，则有

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = T\ddot{r} + \dot{r}$$

因为 $r(t) = R \cdot 1(t)$ ，有 $\dot{r} = 0$ ， $\ddot{r} = 0$ ，上式可写为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ky = T\ddot{r} + \dot{r}$$

由非线性特性得

$$\begin{cases} y = e & |e| > e_0 \\ y = ke & |e| < e_0 \end{cases}$$

因而有

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 & |e| > e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = 0 & |e| < e_0 \end{cases}$$

开关线为 $e = \pm e_0$ ，将 $G(j\omega)$ 平面分成三个区域，且坐标原点是奇点。

(1) 当 $|e| > e_0$ 时，系统在大误差信号下工作，其微分方程为

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0$$

因为 $\frac{1}{2\sqrt{KT}} < 1$ ，所以此时工作在负阻尼状态，奇点为稳定焦点，且为虚奇点。

(2) 当 $|e| < e_0$ 时, 系统在小误差信号下工作, 其微分方程为

$$T\dot{e} + \dot{e} + Ke = 0$$

因为 $\frac{1}{2\sqrt{KT}} > 1$, 所以此时工作在过阻尼状态, 奇点

为稳定焦点, 且为实奇点。

当初始条件为零时, 系统相轨迹起始于 $e(0) = R, \dot{e}(0) = 0$, 所对应的点为 A (如图 8-20 所示)。从 A 点开始按对数螺旋线向稳定焦点(原点)收敛直到 B 点; 相轨迹在 B 点发生转换, 转换后沿抛物线向稳定节点(原点)收敛; 相轨迹在 C 点又发生转换, 相轨迹又按对数螺旋线向稳定焦点(原点)收敛, 直到 D 点, 相轨迹再次发生转换; 如此下去, 最终收敛到稳定焦点(原点)。在稳态时系统不存在误差。

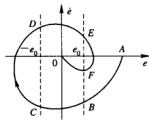


图 8-20

讨论: 从以上各例可知, 有关相轨迹内容的试题, 首先应会画图。在画图过程中, 根据开关线将 $G(j\omega)$ 平面分成几个部分, 每部分都对应有相应的微分方程。对于微分方程, 若便于求解, 应通过求解建立该部分相轨迹的表达式; 对于微分方程不便于求解的, 应知道该区域奇点(可能为虚奇点)的性质, 然后按奇点的性质大致画出该区域的相轨迹, 也就是说此时应熟悉不同奇点所对应相轨迹的大致形状(见表 8.2)。

当然, 相轨迹也可用作图法, 如等倾线、 δ 圆法, 由于作图法需要比解析法更准确地作图, 所以只有在用解析法不方便时, 才选用图法。

例 8.9 试分析图 8-21 所示的非线性控制系统 ($M=2, h=0.5$) 的稳定性, 若系统存在自振, 则求出自振的振幅及频率。

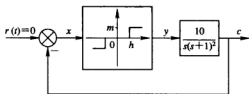


图 8-21

解 三位继电器特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}, \quad (A \geq h)$$

当 $A \rightarrow h$ 或 $A \rightarrow \infty$ 时, $B_1 = 0$, $A_1 = A^2\omega/4$, 即 $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$, 因此 $N(A)$ (或 $-\frac{1}{N(A)}$) 轨迹线必存在极值。为此令 $\frac{dN(A)}{dA} = 0$, 得 $A = \sqrt{2}h$, 此时

$$P = -\frac{1}{N(A)} \Big|_{A=\sqrt{2}h} = -\frac{\pi h}{2M}$$

$-\frac{1}{N(A)}$ 曲线见图 8-22。

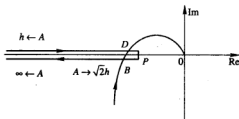


图 8-22

线性部分的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)(j\omega + 1)^2} = \frac{-20\omega}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2} - j \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$-\frac{1}{N(A)}$ 及 $G(j\omega)$ 曲线交于 B 点及 D 点。

由稳定性分析可知, B 点是稳定工作点(因该点所处的 $-1/N(A)$ 曲线随 A 值的增大方向为由 $G(j\omega)$ 曲线内穿出走向 $G(j\omega)$ 外), 而 D 点是不稳定的工作点(因该点所处的 $-1/N(A)$ 曲线随 A 值的增大方向由 $G(j\omega)$ 曲线外穿入走向 $G(j\omega)$ 内)。

令 $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$, 得 $\omega = 1$, $A_B = 12.7$, $A_D = 0.5$ 。

因此, 当扰动小于 0.5 时系统运动趋向平衡状态; 当扰动大于 0.5 时, 系统进入稳定自振状态, 自振的振幅为 12.7, 频率为 1(rad/s)。

描述函数法分析非线性控制系统的精度问题的讨论: 本题的非线性特性是单值奇对称函数, 所以在正弦输入信号作用下, 各次谐波的余弦分量都是零, 即 $A_1 = A_2 = \dots = 0$, 而谐波的正弦分量逢偶次谐波也为零, 即 $B_2 = B_4 = B_6 = \dots = 0$, 而 B_1, B_3, B_5, \dots 不为零。

非线性环节特性的数学描述如下:

$$y(t) = \begin{cases} M & \theta \leq \omega t \leq \pi - \theta_0 \\ -M & \pi + \theta_0 \leq \omega t \leq 2\pi - \theta_0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \theta_0 = \arcsin \frac{h}{A}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{4M}{\pi} \cos \theta_0$$

$$B_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin 3\omega t \, d(\omega t) = \frac{4M}{3\pi} \left[1 - 4 \left(\frac{h}{A} \right)^2 \right] \cos \theta_0$$

$$B_5 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \sin 5\omega t \, d(\omega t) = \frac{4M}{5\pi} \left[1 - 12 \left(\frac{h}{A} \right)^2 + 16 \left(\frac{h}{A} \right)^4 \right] \cos \theta_0$$

自振时 $\frac{h}{A} = \frac{0.5}{12.7} = 0.039$, 所以 $\frac{B_3}{B_1} \approx \frac{1}{3}$, $\frac{B_5}{B_1} \approx 0.194$ 。

可见, 在非线环节的输出信号中, 三次谐波幅值仅是基波幅值的 33.3%, 五次谐波幅值则仅为基波幅值的 19.63%。

线性部分对谐波的影响分析如下: 线性部分的对数幅频特性见图 8-23。

因系统的自振频率为 1, 故系统对基波、三次和五次谐波幅值响应增益都在斜率为 -60 dB/dec 的直线上。

因为

$$20 \lg |G(j3)| - 20 \lg |G(j1)| = -60 \lg \frac{3}{1}$$

所以有

$$\frac{|G(j3)|}{|G(j1)|} = \frac{1}{27} = 3.7\%$$

又

$$20 \lg |G(j5)| - 20 \lg |G(j1)| = -60 \lg \frac{5}{1}$$

所以有

$$\frac{|G(j5)|}{|G(j1)|} = \frac{1}{5^3} = 0.8\%$$

则有

$$\frac{B_3}{B_1} \cdot \frac{|G(j3)|}{|G(j1)|} = 1.23\%, \quad \frac{B_5}{B_1} \cdot \frac{|G(j5)|}{|G(j1)|} = 0.157\%$$

计算结果表明作用在非线环节输入端的三次谐波信号的幅值仅为基波幅值的 1.23%, 而五次谐波信号的幅值仅为基波信号的 0.157%, 它所引起的误差将是很小的。故在线性部分具有良好的低通滤波性能的条件下, 用描述函数法分析非线性系统具有足够的精度。

例 8.10 非线性系统如图 8-24 所示, 试用描述函数法分析周期运动的稳定性, 并确定系统输出信号的振幅和频率。($M = 1, h = 0.2$)

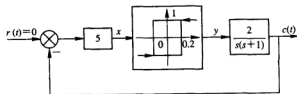


图 8-24

解 有滞环的继电特性的描述函数为:

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi A^2}, \quad A \geq h$$

负倒描述函数为:

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi A^2}$$

因此 $-1/N(A)$ 的虚部与幅值 A 无关, 其轨迹是一条与实轴平行的直线, 见图 8-25。

线性部分的频率特性为:

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega + 1)} = -\frac{10(\omega + j)}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

因 $-1/N(A)$ 由 $G(j\omega)$ 内穿出走向 $G(j\omega)$ 曲线外, 所以存在稳定的自振荡。

令 $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$, 得 $\omega = 3.9$, $A = 0.81$ (注意: 该幅值指的是非线性特性输入端 x 信号的基波幅值。)

输出的幅值为 $\frac{A}{5} = 0.16$, 或用下式计算:

$$A \cdot N(A) \cdot |G(j3.9)| = 0.16$$

所以系统存在稳定的周期运动, 输出信号的振幅为 0.16, 频率为 3.9。

例 8.11 设非线性系统方程为 $\ddot{x} + u(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$; 试用描述函数法分析该系统是否存在周期运动解, 若有, 幅值和频率是多少? 该解是否对应自激振荡 ($0 < u < 1$)?

解 用描述函数分析非线性系统时, 该系统必须具备典型结构。因此原方程可以改写为

$$\ddot{x} - u\dot{x} + x = -ux^2 \cdot \dot{x}$$

故该系统的等效结构图如图 8-26 所示。图中, $y = x_1^2 \dot{x}_1 = -x^2 \dot{x}$ 。

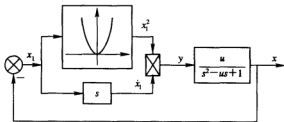


图 8-26

设 $x_1 = -x = A \sin \omega t$, 有

$$x_1^2 = A^2 \sin^2 \omega t, \quad \dot{x}_1 = \omega A \cos \omega t$$

则非线性特性的输出为

$$y = x_1^2 \dot{x}_1 = \omega A^3 \sin^2 \omega t \cos \omega t$$

故有:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{\omega A^3}{4}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \omega t \, d(\omega t) = 0$$

或因为

$$\begin{aligned}\cos \omega t \sin^2 \omega t &= \cos \omega t \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos \omega t \cos 2\omega t \\&= \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} (\cos 3\omega t + \sin \omega t \sin 2\omega t) \\&= \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos 3\omega t - \cos \omega t \sin^2 \omega t\end{aligned}$$

所以

$$\cos \omega t \sin^2 \omega t = \frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 3\omega t$$

故有

$$y(t) = A^3 \omega \cos \omega t \sin^2 \omega t = \frac{A^3}{4} \omega \cos \omega t - \frac{A^3}{4} \omega \cos 3\omega t$$

即有 $B_1 = 0$, $A_1 = A^3 \omega / 4$, 所以有

$$N(A) = j \frac{A_1}{A} = j \frac{A^2 \omega}{4}$$

由 $N(A) \cdot G(j\omega) = -1$ 得

$$1 + j \frac{A^2 \omega}{4} \cdot \frac{u}{(j\omega)^2 - u j\omega + 1} = 0$$

上式可写成

$$j\omega G(j\omega) = \frac{juk\omega}{1 - \omega^2 - juk\omega} = -\frac{4}{A^2}$$

将 $-\frac{4}{A^2}$ 看成类似负倒描述函数, 其轨迹为一
直线, 见图 8-27。

令 $j\omega G(j\omega) = \delta + j\epsilon$, 可得

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)\delta = -uk\omega\epsilon \\ (1 - \omega^2)\epsilon = uk\omega(1 + \delta) \end{cases}$$

将上述方程组消去 ω 得

$$\left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2 + \epsilon^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

上式说明 $j\omega G(j\omega)$ 的轨迹为一个圆, 而将 $-\frac{4}{A^2}$ 看成负倒描述函数, 则从 $j\omega G(j\omega)$ 曲线与 $-\frac{4}{A^2}$ 曲线之间的关系可确定非线性系统有关性质, 见图 8-27。两条曲线在 $\omega = 1$ 及 $A = 2$ 处相交。

由于 $s G(s) = \frac{us}{s^2 - us + 1}$ 有两个极点在 s 右半平面, 因此当 ω 由 0 到 $+\infty$ 变化时, 轨迹必须按逆时针方向绕 $(-\frac{4}{A^2}, j0)$ 点转过一圈, 系统才是稳定的。从图 8-27 可知, 当 $A > 2$ 时振幅轨迹 (即 $-4/A^2$ 的轨迹) 被包围在 $j\omega G(j\omega)$ 曲线内, 而且包围了一次 (一次正穿越; 若包含 ω 由 $-\infty$ 到 0 的变化, 则包围两次), 所以在 $A > 2$ 时, 系统是稳定的, 此情

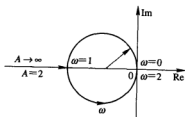


图 8-27

况时 A 逐渐减小, 直到 $A = 2$ 处于临界状态, 当 $A < 2$ 时, 系统则是不稳定的, 这时 A 将逐渐增大, 直到 $A = 2$, 因此交点处对应了系统稳定的周期运动, 其振幅为 $A = 2$, 频率为 $\omega = 1$ 。

例 8.12 图 8-28 所示非线性系统, 在输入 $r(t) = 0$ 时, 试用等倾线法绘制其相轨迹。

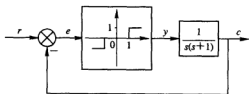


图 8-28

解 非线性特性为

$$y = f(e) = \begin{cases} 1 & e > 1 \\ 0 & |e| < 1 \\ -1 & e < -1 \end{cases}$$

线性部分微分方程为

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + \frac{dc}{dt} = y$$

因为 $e = r - c$, 则

$$\dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = -\dot{c}, \quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

令 $x_1 = e$, $x_2 = \dot{e}$, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - y = -x_2 - f(x_1) \end{cases}$$

于是有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2 + f(x_1)}{x_2} = q \quad (q \text{ 为相轨迹的斜率})$$

开关线 $e = \pm 1$ 将 $e - \dot{e}$ 相平面分成三个区域:

(1) 当 $x_1 > 1$ 时 (即 $e > 1$), $f(x_1) = 1$, 等倾线方程为

$$q = -\frac{x_2 + 1}{x_2} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{q+1}$$

它是平行于水平轴的一组直线。

(2) 当 $x_1 > 1$ 时 ($|e| < 1$), $f(x_1) = 0$, 等倾线方程为

$$q = -1$$

在此区域内所有的相轨迹斜率均为 -1 。

(3) 当 $x_1 < -1$ 时 ($e < -1$), $f(x_1) = -1$, 等倾线方程为

$$q = -\frac{x_2 - 1}{x_2} \quad \text{或} \quad x_2 = \frac{1}{q+1}$$

它也是一组与水平轴平行的直线。

图 8-29 中设 q 为不同值画出一系列等倾线。如果系统外部输入 $r(t) = 0$ ，在初始状态 $x_1(0) = 3$ ， $x_2(0) = 0$ 情况下，画出来的相轨迹正如此图所示。由图可见，在给定条件下， x_1 是单调衰减的，并且由于存在死区非线性特性，所以最后 x_1 不能递减到零。

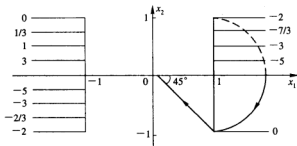


图 8-29

例 8.13 若非线性系统具有典型结构，试用等效增益概念分析具有死区的三位理想继电器(见图 8-30(a))，对系统稳定性的影响。

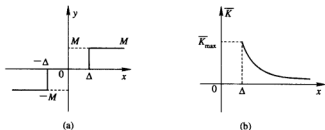


图 8-30

解 设系统不存在非线性时临界稳定增益为 K_w ；线性部分增益为 K_l 。

由等效增益定义得 $\bar{K} = y/x$ 。该非线性环节等效增益随着 $|x|$ 的增大而减小，最大增益为 $\bar{K}_{\max} = M/\Delta$ ；见图 8-30(b)。

当 $K_l \times \bar{K} > K_w$ ，即 $|x| < \frac{K_l \cdot M}{K_w}$ 时，系统不稳定；

当 $K_l \times \bar{K} < K_w$ ，即 $|x| < \frac{K_l \cdot M}{K_w}$ 时，系统稳定。

令 $x_m = \frac{K_l \cdot M}{K_w}$ ，得当 $|x| < x_m$ 时系统不稳定，当 $|x| > x_m$ 时系统稳定。

可见，当 $|x| < x_m$ 时，系统发散， $|x|$ 增大；当 $|x|$ 增大到 $|x| > x_m$ 时，系统稳定， $|x|$ 收敛减小；当 $|x|$ 减小到 $|x| < x_m$ 时，重复前面过程。在这种情况下，系统将出现以 x_m 为振幅的自激振荡。

从上述分析可知，原系统加入具有死区的理想三位继电器后改善了系统的稳定性。不论原系统是否发散，现系统都不会发散，但可能产生一个以 x_m 为振幅的自激振荡。

8.6 习 题

8.1 试绘制图 8-31 所示系统的 $\dot{c}-c$ 平面上的相轨迹图 ($c(0) = 1, \dot{c}(0) = 1$)。

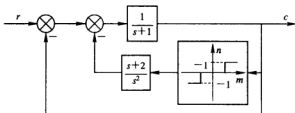


图 8-31

8.2 已知系统如图 8-32, 图中, 物体左右平衡时的摩擦系数为零, m 为物体的质量, K 为弹簧弹性常数, x 为水平位移; 试作出 $x-\dot{x}$ 的相平面图(初始 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$)。

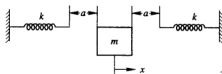


图 8-32

8.3 已知非线性系统如图 8-33 所示, 试画出系统在 $\dot{c}-c$ 平面上的相轨迹, $\dot{r}(t) = u(t), \dot{c}(0) = 0$ 。

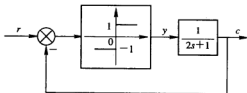


图 8-33

8.4 某比例微分—控制的非线性控制系统如图 8-34 所示, 其中 $0 < \beta < 1, a < 1$, 该系统原来处于静止状态, 输入作用为 $r(t) = 1(t)$, 试用相平面图 $e-\dot{e}$ 分析微分控制的效应。

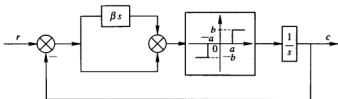


图 8-34

8.5 为改善系统的性能,今采用图 8-35(a)所增添的变增益控制,图中 K_N 是非线性校正装置,其特性如图 8-35(b)所示,试在相平面 $e-\dot{e}$ 上画出当输入为阶跃函数时 $e(0) = 1, \dot{e}(0) = 0$ 和 $e(0) = 3, \dot{e}(0) = 0$ 的两条相轨迹,并在相平面上讨论变增益控制对动态性能的影响。

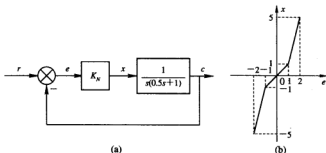


图 8-35

8.6 已知非线性系统如图 8-36 所示,设原系统处于静止状态。

- ① 试在 $e-\dot{e}$ 平面上给出 $r(t) = R \times 1(t)$ 时系统的相轨迹。
- ② 标出初态为 $e = 3, \dot{e} = 0$ 的运动轨迹。
- ③ 求出初态为 $e = 1, \dot{e} = 0.8$ 时的稳态误差 e_{ss} 。

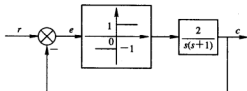


图 8-36

8.7 某模拟系统在阶跃信号作用下误差的微分方程为 $\ddot{e} + 2|\dot{e}| + e = 0$, 要求:

- ① 在 $e-\dot{e}$ 平面上绘出系统运动的相平面图。
- ② 加粗由初始态 $e = 2, \dot{e} = 0$ 和 $e = -2, \dot{e} = 0$ 出发的两条相轨迹。
- ③ 讨论系统的运动特性。

8.8 具有饱和限幅特性的非线性系统如图 8-37, 系统的输入作用为阶跃信号 $r(t) = R \times 1(t)$, 其中 $K_f = 1$ 。

- ① 在 $e-\dot{e}$ 相平面上绘出系统的相平面图。
- ② 加粗由初始状态 $e = 3, \dot{e} = 0$ 和 $e = -3, \dot{e} = 0$ 发出的两条相轨迹, 并说明其运动特性。

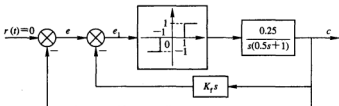


图 8-37

8.9 已知系统如图 8-38(a) 所示, 在平面 $x-\dot{x}$ 上划分区域为 I、II, 其中区域 I 为: $x \geq 0$ 且 $\delta \geq 0$ 或 $x < 0$ 且 $\delta < 0$; 区域 II 为: $x \leq 0$ 且 $\delta \geq 0$ 或 $x \geq 0$ 且 $\delta \leq 0$, 如图 8-38(b) 所示; 在区域 I 时, 开关打向 1, 在区域 II 时, 打向 2。

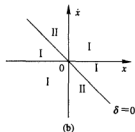
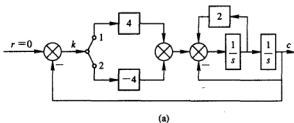


图 8-38

- ① 在 $x-\dot{x}$ 平面上大致画出相轨迹簇。
 - ② 大致画出初始点 A 为 $x = -2, \dot{x} = 4$ 时的相轨迹。
- 8.10 已知一带有饱和特性的非线性系统, 其线性部分的传递函数为 $\frac{4.5}{s(2s+1)(0.5s+1)}$, 饱和特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{2K_1}{\pi} \left(\frac{s}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{A} \right)^2} + \sin^{-1} \frac{s}{A} \right)$$

饱和非线性特性如图 8-39 所示。

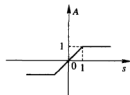


图 8-39

- ① 作出线性部分的奈氏特性图, 并作出非线性的负倒描述函数曲线。

- ② 分析系统是否存在稳定的自振荡, 如果有, 求出自振荡的振荡频率和振幅。

8.11 系统非线性环节如图 8-40 所示, 要求

- ① 画出 $m(t) = m \sin \omega t$ 时, 输出 $n(t)$ 的波形;
- ② 求此非线性环节的描述函数。

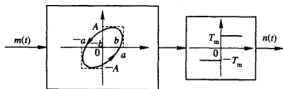


图 8-40

8.12 非线性系统如图 8-41 所示, 具有死区的继电特性描述函数为 $\frac{4T_m}{\pi E} \sqrt{1 - \frac{D^2}{E^2}}$,

E 为 $e(t)$ 的幅值(提示: 当 $E/D = \sqrt{2}$ 时 N 为极值)。

- ① 求出系统可能出现自激振荡点的临界 K 值 K_c 。
- ② 分析 $K = K_c$ 及 $K \neq K_c$ 对自激振荡点的稳定性的影响, 并求出 $K = 2K_c$ 时的稳定振荡频率和幅值。

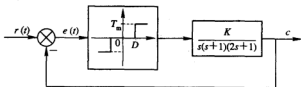


图 8-41

8.13 非线性系统如图 8-42 所示, 其中饱和特性的 $k = 2$, $a = 1$, 带死区的继电器参数为 $M = 1.7$, $h = 1.4$ 。

- ① 试用描述函数法, 分析该系统是否存在自激, 若存在, 求出自激振幅和频率。
- ② 说明抵制或消除该系统自振的方法。(带死区的非线性特性的描述函数为 $N(A) = \frac{4m}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2}$, $A > h$)

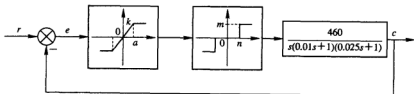


图 8-42

8.14 已知非线性系统的结构图如图 8-43 所示, 其中非线性环节的描述函数 $N(A) = \frac{A+6}{A+2}$ ($A > 0$), 试用描述函数法确定:

- ① 使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时, 线性部分的取值范围。
- ② 判断周期运动的稳定性, 并计算稳定周期运动的振幅和频率。

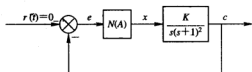


图 8-43

8.15 某非线性系统如图 8-44 所示, 已知非线性环节的描述函数 $N(x) = \frac{4}{\pi x}$ 。

- ① 为使系统的自激振荡振幅 $x < 0.2$, K 应满足什么条件?
- ② 若取 $K = \frac{3\pi}{2}$, 试求系统产生自激振荡时的 $c_1(t)$ 。

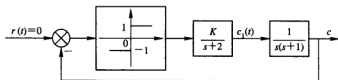


图 8-44

第9章 线性系统理论

9.1 本章要求

(1) 会从其它形式(如微分方程, 结构图, 传递函数等)的数学模型建立状态空间表达式; 熟悉公式 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 。

(2) 掌握如何通过非奇异线性变换, 从一般形式和特殊形式的状态空间表达式, 获得规范型, 如可控规范型, 可观规范型, 对角线标准型, 约当标准型。

(3) 会求线性系统的状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$, 正确运用状态转移矩阵 Φ 的有关性质。

(4) 正确理解可控性、可观性的基本概念, 熟练运用相关判据尤其是能控矩阵和能观矩阵判别法。

(5) 掌握李雅普诺夫意义下的稳定性概念, 以及用李雅普诺夫第二方法判定非线性系统稳定性的方法。对于线性系统, 要熟记 $A^T P + AP = -Q$ 表达式及有关矩阵 P 、 Q 的要求。对于非线性系统, 要了解克拉索夫方法和变量梯度法。

9.2 基本概念

1. 状态空间表达式

1) 状态、状态变量、状态向量

状态: 表征系统运动状况的信息集合, 并可用来确定系统的未来运动状况。

状态变量: 确定系统状态的一组独立(数目最少的)的变量。 n 阶系统具有 n 个独立变量; 若多于 n 个则必有不独立的变量, 若少于 n 个, 则不足以描述系统的状态。

状态向量: 把描述系统状态的 n 个状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , $x_n(t)$ 作为向量 $X(t)$ 的分量, 则 $X(t)$ 称为 n 维状态向量。记为 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ 。

同一系统, 状态变量的选取具有非惟一性, 但其个数 n 是惟一的。

2) 状态空间、状态方程、输出方程

状态空间: 以各状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , $x_n(t)$ 作为坐标轴所组成的 n 维空间称为状态空间。

状态轨迹: 随着时间的推移, $X(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹, 称为状态轨迹。

状态方程: 状态变量的一阶导数与状态变量、输入量之间的关系式。由于 n 阶系统具有 n 个状态变量, 故系统的状态方程由 n 个独立的一阶微分方程或差分方程组成。

输出方程: 系统的输出量与状态变量、输入量之间的关系称为输出方程。若系统有 q 个输出, 则输出方程由 q 个方程组成。

由于状态变量的选取具有非惟一性；故同一系统的状态方程(输出方程)可能具有不同的表达形式，但它们之间一定存在某种确定的线性变换关系。

3) 状态空间表达式

状态方程和输出方程的组合称为状态空间表达式，又称为动态方程。

4) 线性系统的状态空间表达式

线性连续系统的动态结构图如图 9-1 所示。设线性系统的状态向量为 $\mathbf{X}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ ，有 q 个输出 $\mathbf{Y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)]^T$ ，有 r 个输入 $\mathbf{U}(t)=[u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$ 。则其状态空间表达式如下：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t) \end{cases}$$

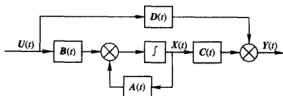


图 9-1 线性连续系统的动态结构图

若用 k 表示第 k 次采样时间，则对于离散系统，其状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{U}(k) \\ \mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{U}(k) \end{cases}$$

其中状态矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 及 $\mathbf{G}(k)$ 为 $n \times n$ 矩阵，控制矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 及 $\mathbf{H}(k)$ 为 $n \times r$ 矩阵，输出矩阵 $\mathbf{C}(t)$ 及 $\mathbf{C}(k)$ 为 $q \times n$ 矩阵，输入输出矩阵 $\mathbf{D}(t)$ 及 $\mathbf{D}(k)$ 为 $q \times r$ 矩阵。

5) 线性定常系统的状态空间表达式

在线性系统中，若系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$ 或 $\mathbf{G}(k)$ 、 $\mathbf{H}(k)$ 、 $\mathbf{C}(k)$ 、 $\mathbf{D}(k)$ 的各元素为常数，则称该系统为线性定常系统，否则是线性时变系统。线性定常系统的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{X}(k) + \mathbf{H}\mathbf{U}(k) \\ \mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}\mathbf{U}(k) \end{cases} \quad (9-1)$$

由于输出方程中的 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{U}$ 是正比于输入的，因此与系统的动态特性无关，一般情况下可忽略之而不失普遍性。

当输出方程中 $\mathbf{D} = 0$ 时，称系统为绝对固有系统，否则称为固有系统。对于上面所描述的系统常简记为：系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 或系统 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ，以及系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 或系统 $(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$ 。

6) 状态空间表达式的一般形式

当状态变量的一阶导数不是状态变量和输入量的线性组合时，状态空间表达式的一般形式如下：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) \end{cases}$$

其中 $f=[f_1, f_2, \dots, f_n]^T$, $g=[g_1, g_2, \dots, g_m]^T$, f_i, g_j 为任意函数, $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, q$ 。

若函数 f, g 中均不显含时间 t , 则称该系统为自治系统; 否则称为非自治系统。自治系统的一般形式为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=f(X(t), U(t)) \\ Y(t)=g(X(t), U(t)) \end{cases}$$

2. 等价系统方程与线性变换

对于同一动态系统, 其状态变量的选取不是惟一的。不同的状态变量的选取, 会导致同一系统在形式上有不同的动态方程。但是这些不同的动态方程互为等价系统, 因它们描述同一系统。

对于线性定常连续系统, 若选定状态变量为 $X(t)$, 则系统为 (A, B, C, D) ; 当选择另一组不同的状态变量 $\bar{X}(t)=TX(t)$ 时系统为 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$; 因它们描述同一系统, 则系统 (A, B, C, D) 与 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 之间必存在一种关系。具体关系如下:

$$\bar{A}=TAT^{-1}=P^{-1}AP, \quad \bar{B}=TB=P^{-1}B, \quad \bar{C}=CT^{-1}=CP, \quad \bar{D}=D$$

称满足上式的系统 (A, B, C, D) 与 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 互为相似系统, 相应的动态方程称为等价方程; 实现它们之间转换的线性变换称为等价变换。 T 是坐标变换矩阵, $P=T^{-1}$ 是状态空间的变换矩阵。

通过这样的线性变换(等价变换), 仍描述着同一系统; 因而这种线性变换不改变系统的固有特性。具体地说, 就是非奇异的线性变换, 不改变系统的特征方程、特征值, 也不改变系统的传递矩阵(函数)、系统的能控性和能观性。

当然, 上述概念及结论也适合线性时变系统。

3. 特征方程、特征值和特征向量

特征方程: 线性系统 (A, B, C, D) 的特征方程定义为: $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$

特征值: 使式 $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$ 成立的 λ 称为矩阵 A 的特征值。 n 阶系统具有 n 个特征值, 特征值可以是实数、复数, 也可能出现重根。特征值就是表征系统基本特征的极点, 等价变换不改变系统的特征方程, 也不改变系统的特征值。

特征向量: 使式 $A p=\lambda p$ 成立的向量 p 称为特征向量, 其中 λ 为矩阵 A 的特征值。特征向量有且仅有 n 个线性无关的向量。

凯利-哈密顿定理: 方阵 A 满足其自身的特征方程, 即若 $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$, 则有 $f(A)=0$ 。

4. 状态空间表达式和传递函数矩阵

若线性定常系统的动态方程为(9-1)式, 在零初始条件下, 对其进行拉氏变换得:

$$\begin{cases} sX(s)=AX(s)+BU(s) \\ Y(s)=CX(s)+DU(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (sI-A)X(s)=BU(s) \\ Y(s)=CX(s)+DU(s) \end{cases}$$

则有:

$$Y(s)=\{C(sI-A)^{-1}B+D\}U(s)$$

传递函数矩阵为: $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$, $G(s)$ 为 $q \times r$ 矩阵, q 为输出个数, r 为输入个数。当 $q=r=1$ 时, $G(s)$ 为传递函数。一般有 $D=0$ 。

5. 线性系统的规范型

常用的状态方程规范型主要有两种类型：一类是以 A 的特征值表示的规范型，主要有对角规范型和约当规范型；另一类是表征系统能控性与能观性的规范型。实现上述变化的核心在于构造非奇异的线性变换 T 。

1) 对角规范型

若系统的状态矩阵 A 有 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，与之相应的特征向量为 p_1, p_2, \dots, p_n ；令矩阵 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ ，变换矩阵 $T = P^{-1}$ 。

特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 可由特征方程 $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ 求出。

特征向量为 p_1, p_2, \dots, p_n ，可由式 $Ap_i = \lambda_i p_i$ 求出，每一特征值对应求出一个特征向量，特征向量之间是线性无关的。

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

若状态矩阵 A 为友矩阵这种特殊形式，即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{则在这种情况下，有 } T = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

对角规范型 \bar{A} 的对角线上的各元素为系统的特征值(极点)，而且此时各状态变量之间互不影响，实现了完全的解耦；这种形式非常便于系统性能的有关计算和分析。

2) 约当规范型

当系统的状态矩阵 A 存在有 n 个互不相等的重特征值 λ_1 ，与之相应的 n 个互不相关特征向量为 p_1, p_2, \dots, p_n ；令矩阵 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ ，变换矩阵 $T = P^{-1}$ ，则有：

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

特征值 λ_1 由特征方程 $f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$ 求出；特征向量为 p_1, p_2, \dots, p_n ，由下列公式求出：

$$(\lambda_1 I - A)p_1 = 0, (\lambda_1 I - A)p_2 = -p_1, (\lambda_1 I - A)p_3 = -p_2, \dots, (\lambda_1 I - A)p_n = -p_{n-1}$$

每一表达式对应求一个特征向量，它们之间是线性无关的。注：特殊情况的处理见例 9.7。

若状态矩阵 A 为友矩阵这种特殊形式时, 则

$$T = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \frac{\prod_{i=1}^2 (n-i)}{2!} \lambda_1^{n-3} & \frac{\prod_{i=1}^3 (n-i)}{3!} \lambda_1^{n-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}]^{-1}$$

其中 $h_0, h_1, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}$ 为列向量, 有

$$h_0 = (1 \quad \lambda_1 \quad \lambda_1^2 \quad \cdots \quad \lambda_1^{n-1})^T,$$

$$h_1 = \frac{\partial h_0}{\partial \lambda_1}, h_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h_0}{\partial \lambda_1^2}, \dots, h_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{(k)} h_0}{\partial \lambda_1^{(k)}}, \dots, h_{n-1} = (0 \cdots 0 \ 1)^T$$

约当规范型 \bar{A} 将系统化为了所能达到的最弱耦合形式, 这种形式有利于系统性能的有关计算和分析。

3) 重根和单根同时存在时的约当规范型

当系统的特征值既有单根, 又有重根时, 可将对角规范型和约当规范型转化方法结合起来, 即可得到相应的规范型。

若系统有 r 个单根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, 其相应的特征向量 p_1, p_2, \dots, p_r 可由式 $Ap_i = \lambda_i p_i$ 求出。

另外还有 l 个重根 $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_{r+l}$, 每个重根的次方分别为 $l_{r+1}, l_{r+2}, \dots, l_{r+l}$, 则有 $l_{r+1} + l_{r+2} + \dots + l_{r+l} = n - r$; 对于每个重根 λ_{r+i} 都有与之重根次数 l_{r+i} 相同个数的特征向量 $p_{r+i,1}, p_{r+i,2}, \dots, p_{r+i,l_{r+i}}$ 可由下列方程式求出:

$$\begin{aligned} (\lambda_{r+i} I - A) p_{r+i,1} &= 0, \\ (\lambda_{r+i} I - A) p_{r+i,2} &= -p_{r+i,1} \\ (\lambda_{r+i} I - A) p_{r+i,3} &= -p_{r+i,2} \\ \cdots (\lambda_{r+i} I - A) p_{r+i,l_{r+i}} &= -p_{r+i,l_{r+i}-1} \end{aligned}$$

则有

$$P = [(p_1, p_2, \dots, p_r), (p_{r+1,1}, p_{r+1,2}, \dots, p_{r+1,l_{r+1}}, \dots, p_{r+l,1}, p_{r+l,2}, \dots, p_{r+l,l_{r+l}})]$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_{r+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{r+l} \end{bmatrix}$$

其中 A_i 为对角矩阵块

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+l}$ 为约当矩阵块,

$$A_{r+i} = \begin{bmatrix} \lambda_{r+i} & 1 & & 0 \\ & \lambda_{r+i} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_{r+i} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, l$$

当状态矩阵 A 为友矩阵这种特殊形式时, 则 $T=P^{-1}=[T_1 \ T_{r+1} \ \dots \ T_{r+l}]^{-1}$.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_r^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times r}$$

$$T_{r+i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & \dots \\ \lambda_{r+i} & 1 & & 0 & \dots \\ \lambda_{r+i}^2 & 2\lambda_{r+i} & & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{r+i}^{n-1} & (n-1)\lambda_{r+i}^{n-2} & \frac{\prod_{j=1}^2 (n-j)}{2!} \lambda_{r+i}^{n-3} & \dots \end{bmatrix}_{n \times l_{r+i}}$$

4) 模态规范型

当系统矩阵 A 的特征值有复数特征值时, 仍可以先按上述方法把 A 化为规范型; 但此时规范型中会出现复数, 这给系统分析与设计均带来不便, 因此需要进一步处理, 即进行模态规范化。

设系统有 r 个单根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, 其相应的特征向量 p_1, p_2, \dots, p_r 可由式 $Ap_i = \lambda_i p_i$ 求出。

有 m 对复数特征值 $\lambda_{mk} = \delta_{mk} \pm j\omega_{mk}$, 其相应的特征向量为 $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm}$ ($p_{nk} = \alpha_{nk} \pm j\beta_{nk}, k=1, 2, \dots, m$), 可由式 $Ap_{nk} = \lambda_{nk} p_{nk}$ 求出 $p_{r+1,1}, p_{r+1,2}, \dots, p_{r+l, l_{r+i}}$ 。

另外有 l 个重根 $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_{r+l}$, 每个重根的次次数分别为 $l_{r+1}, l_{r+2}, \dots, l_{r+l}$, 则有 $l_{r+1} + l_{r+2} + \dots + l_{r+l} = n - r - 2m$; 对于每个重根 λ_{r+i} , 都有与之重根次数 l_{r+i} 相同个数的特征向量, 可由下列方程式求出:

$$\begin{aligned} (\lambda_{r+i}I - A)p_{r+i,1} &= 0 \\ (\lambda_{r+i}I - A)p_{r+i,2} &= -p_{r+i,1} \\ (\lambda_{r+i}I - A)p_{r+i,3} &= -p_{r+i,2} \\ &\dots \\ (\lambda_{r+i}I - A)p_{r+i, l_{r+i}} &= -p_{r+i, l_{r+i}-1} \end{aligned}$$

则有

$$P = [(p_1, p_2, \dots, p_r), (p_{r+1,1}, p_{r+1,2}, \dots, p_{r+1, l_{r+1}}), \dots, (p_{r+l,1}, p_{r+l,2}, \dots, p_{r+l, l_{r+l}}), (\alpha_{m1}, \beta_{m1}, \dots, \alpha_{mm}, \beta_{mm})]$$

规范型为

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_{r+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{r+i} & \\ & & & & M_{ni} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & M_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 A_1 为对角矩阵块, 形式同上; $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+i}$ 为约当矩阵块, 形式亦同上; 而

$$M_{ni} \text{ 的形式为 } M_{ni} = \begin{bmatrix} \delta_{ni} & \omega_{ni} \\ -\omega_{ni} & \delta_{ni} \end{bmatrix}.$$

假设第 k 对复特征值为 j 重根, 则

$$M_{nk} = \begin{bmatrix} M_{nk,j} & I & & \\ & M_{nk,j} & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ & & & & M_{nk,j} \end{bmatrix}_{2j \times 2j} \quad \text{式中 } M_{nk,j} = \begin{bmatrix} \delta_{nk} & \omega_{nk} \\ -\omega_{nk} & \delta_{nk} \end{bmatrix}$$

5) 能控规范型

对于单输入系统 (A, b) , 若存在非奇异线性变换矩阵 $T = P^{-1}$, 将状态矩阵与输入矩阵转换为具有如下规范型:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则称上式的表达形式 (\bar{A}, \bar{b}) 为能控规范型。注意能控规范型指的是 \bar{A} 和 \bar{b} 同时为上述形式时。其中 $a_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 为特征多项式的各项系数。即

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - \bar{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

若系统是能控的(该概念见后面介绍), 即能控性矩阵 $Q_c = [b \ Ab \ A^2b \ \cdots \ A^{n-1}b]_{n \times n}$ 是满秩的。有

$$\begin{aligned} T^{-1} &= [A^{n-1}b \ \cdots \ A^2b \ Ab \ b] \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & \cdots & \ddots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= [b \ Ab \ A^2b \ \cdots \ A^{n-1}b] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \vdots & \ddots & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若 $\bar{C}=[\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}]$, 则该系统的传递函数为:

$$G(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1s^1+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s^1+a_0}$$

6) 能观规范型

对于单输出系统 (A, C) , 若存在非奇异线性变换矩阵 $T=P^{-1}$, 将状态矩阵与输出矩阵变换为具有如下规范型:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}=[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

则称上式的表达形式 (\bar{A}, \bar{C}) 为能观测规范型。注意能控规范型指的是 \bar{A} 和 \bar{C} 同时为上述形式时。其中 $a_i (i=0, 1, \cdots, n-1)$ 为特征多项式的各项系数, 即

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - \bar{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

若系统是完全能观测的(该概念见后面介绍), 即能观测性矩阵

$$Q_o = [C^T : (A^T)C^T : (A^T)^2C^T : \cdots : (A^T)^{n-1}C^T]$$

是满秩的。

则有

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

若 $\bar{b}=[\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}]^T$, 则该系统的传递函数为:

$$G(s)=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1s^1+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s^1+a_0}$$

9.3 状态空间表达式的求取

1. 组合系统的数学描述

在工程上, 控制系统往往由多个子系统组合而成, 如串联、并联或反馈连接。为简便并不失一般性, 给出以两个子系统作各种连接而成的组合系统。设:

Sys1 的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 U_1(t) \\ Y_1(t) = C_1 X_1(t) + D_1 U_1(t) \end{cases}$$

传递函数矩阵为 $G_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$ 。

Sys2 的运动方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_2(t) = A_2 X_2(t) + B_2 U_2(t) \\ Y_2(t) = C_2 X_2(t) + D_2 U_2(t) \end{cases}$$

传递函数矩阵为 $G_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$ 。

1) 并联连接

所谓的并联连接,是指各子系统在相同输入下,组合系统的输出是各子系统输出的代数和,见图 9-2。此时, $U_1 = U_2 = U$, $Y = Y_1 \pm Y_2$; 组合系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U \\ Y = [C_1 \pm C_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2) U \end{cases}$$

组合系统的传递函数矩阵为:

$$W(s) = G_1(s) \pm G_2(s) = (C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1) \pm (C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2)$$

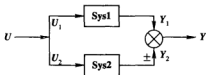


图 9-2 并联连接

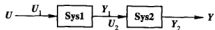


图 9-3 串联连接

2) 串联连接

串联连接见图 9-3, 此时, $U_1 = U$, $U_2 = Y_1$, $Y = Y_2$; 组合系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} U \\ Y = [D_2 C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 U \end{cases}$$

组合系统的传递函数矩阵为:

$$W(s) = G_2(s)G_1(s) = (C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2) \cdot (C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1)$$

对于串联连接,要注意以上各式中的乘积,乘积的先后次序不能颠倒。

3) 反馈连接

反馈连接形式见图 9-4。此时, $U_1 = U - Y_2$, $U_2 = Y_1$, $Y = Y_1$; 组合系统的状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} U \\ Y = [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

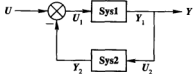


图 9-4 反馈连接

组合系统的传递函数矩阵为:

$$W(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1} = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)$$

2. 状态空间表达式的建立

建立方法主要有两种,其一是直接根据系统的机理建立相应的微分或差分方程,再经整理而得;其二是由已知的该系统的某种其它形式的数学描述经过转化而得。

从其它形式的数学描述转化而得的方法，是状态空间表达式的建立的主要方法。下面给出几个转化的方法。

1) 由微分方程求状态空间表达式

(1) 对于不含有输入信号导数项的微分方程，其形式如下：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

可选取状态变量为：

$$\begin{aligned}x_1 &= y/b_0, \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -[a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots + a_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1] + u\end{aligned}$$

则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

(2) 对于含有输入导数项的微分方程，其形式如下：

$$\begin{aligned}y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y \\ = b_nu^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u\end{aligned}$$

可选取状态变量为：

$$\begin{aligned}x_1 &= y - \beta_0u, \\ x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1u, \\ x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2u, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \dot{x}_{n-2} - \beta_{n-2}u, \quad x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u;\end{aligned}$$

则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

其中 $\beta_0 = b_n$,

$$\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0$$

$$\beta_2 = b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1$$

\vdots

$$\beta_n = b_0 - a_0\beta_0 - a_1\beta_1 - \cdots - a_{n-1}\beta_{n-1}$$

(3) 当含输入导数项时,也可利用线性系统的特性,将系统看成 $(n+1)$ 个输入分别为 $b_0 u$ 、 $b_1 \dot{u}$ 、 \cdots 、 $b_{n-1} u^{(n-1)}$ 和 $b_n u^{(n)}$ 时系统输出的叠加,这 $(n+1)$ 个系统形式如下:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u}$$

\vdots

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)}$$

也可以选取如下状态变量:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

\vdots

$$\dot{x}_{n-2} = x_{n-1},$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n,$$

$$\dot{x}_n = -[a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots + a_2x_3 + a_1x_2 + a_0x_1] + u$$

当输入为 $b_0 u$ 时,输出为 $y_0 = b_0 x_1$; 当输入为 $b_1 \dot{u}$ 时,输出为 $y_1 = b_1 \dot{x}_1 = b_1 x_2$; 当输入为 $b_2 \ddot{u}$ 时,输出为 $y_2 = b_2 \ddot{x}_1 = b_2 x_3$; \cdots ; 当输入为 $b_{n-1} u^{(n-1)}$ 时,输出为 $y_{n-1} = b_{n-1} x_1^{(n-1)} = b_{n-1} x_n$; 当输入为 $b_n u^{(n)}$ 时,输出为 $y_n = b_n x_1^{(n)} = b_n \dot{x}_n$ 。

则总的输出为:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n$$

$$= (b_0 - a_0 b_n) x_1 + (b_1 - a_1 b_n) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x_n + b_n u$$

此时状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [(b_0 - a_0 b_n) (b_1 - a_1 b_n) \cdots (b_{n-2} - a_{n-2} b_n) (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

2) 由传递函数求状态空间表达式

(1) 传递函数 $G(s)$ 的极点不存在重根时, 传递函数可写成如下形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-s_n} + k_0$$

可采用如下形式选择状态变量:

$$x_1(s) = \frac{1}{s-s_1}U(s), x_2(s) = \frac{1}{s-s_2}U(s), \cdots, x_n(s) = \frac{1}{s-s_n}U(s)$$

$$Y(s) = k_1 x_1(s) + k_2 x_2(s) + \cdots + k_n x_n(s)$$

其中, $k_i = \lim_{s \rightarrow s_i} G(s)(s-s_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

若 $G(s)$ 的分母次数大于分子次数, $k_0 = 0$; 当分母与分子次数相等时, $k_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ 。

对以上各式进行拉氏反变换, 可得状态空间表达式为如下对角规范型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_0 u$$

(2) 传递函数 $G(s)$ 的极点为一个 n 重根 s_1 时, 传递函数可写成如下形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_{11}}{(s-s_1)^n} + \frac{k_{12}}{(s-s_2)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_{1n}}{s-s_n} + k_0$$

可采用如下形式选择状态变量:

$$x_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)^n}U(s) = \frac{1}{s-s_1}x_2(s)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{(s-s_1)^{n-1}}U(s) = \frac{1}{s-s_1}x_3(s)$$

\vdots

$$x_{n-1}(s) = \frac{1}{(s-s_1)^2}U(s) = \frac{1}{s-s_1}x_n(s)$$

$$x_n(s) = \frac{1}{s-s_1}U(s)$$

$$Y(s) = k_{11}x_1(s) + k_{12}x_2(s) + \cdots + k_{1n}x_n(s)$$

其中, $k_i = \lim_{s \rightarrow s_i} G(s)(s-s_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 。

若 $G(s)$ 的分母次数大于分子次数, $k_0 = 0$; 当分母与分子次数相等时, $k_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ 。

对以上各式进行拉氏反变换, 可得状态空间表达式为如下对角规范型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & & \\ & s_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [k_{11} \ k_{12} \ \cdots \ k_{1n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_0 u$$

(3) 当传递函数 $G(s)$ 的极点为 k 个重根时, 设 s_1 为 l_1 重根, s_2 为 l_2 重根, \cdots , s_k 为 l_k 重根, 且 $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$ 。与前述极点为一个重根的处理方法类似, 可得出系统状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} u, \quad y = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n]X + k_0 u$$

其中

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in_i} \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} s_i & 1 & & \\ & s_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = [k_{i1} \quad k_{i2} \quad \cdots \quad k_{in_i}]$$

当单根和重根同时存在时,可将单根看成重根的一个特殊情况,此时有 $X_i = [x_{i1}]$, $J_i = [s_i]$, $B_i = [1]$, $C_i = [k_{i1}]$ 。

3) 由系统的方框图求状态空间表达式

(1) 将各环节的传递函数化为最简形式 $\frac{k}{s+p}$ 、 k 和比较器的组合。如

$$\begin{aligned} \frac{s+z}{s+p} &= 1 + \frac{z-p}{s+p} \\ \frac{k}{s(s+p)} &= \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s+p} \\ \frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2} &= \frac{\omega^2/s(s+2\zeta\omega)}{1+\omega^2/s(s+2\zeta\omega)} \end{aligned}$$

(2) 将整个方框图化为只包含 $\frac{k}{s+p}$ 、 k 和比较器这三个典型环节。具体就是:将具有简单函数相加的环节化为单元方框的并联;将具有简单函数相乘的环节化为单元方框的串联;将不可分解的二次振荡环节先化为单位反馈,然后用串联或并联化为最简形式。

(3) 选取具有最简传递函数的环节 $\frac{k}{s+p}$ 输出作为状态变量。根据方框图的信号关系,建立状态变量与输入量、输出量之间的关系式,并消去中间变量。

(4) 对上述的关系式进行拉氏反变换,按状态空间表达式要求整理,即可得到系统的状态空间表达式。

4) 多变量系统的状态空间表达式

对于多变量系统,完全可以采用由系统的方框图求状态空间表达式的方法。也可以采用由传递函数求状态空间表达式的方法处理,一般有如下两步:

(1) 对多变量系统中的各子系统分别由传递函数建立其状态空间表达式。

(2) 按组合系统的状态空间表达式的建立方法建立多变量系统的状态空间表达式。

9.4 状态转移矩阵与运动的解

1. 自由运动

线性定常系统在没有控制作用下,由初始条件引起的运动称为自由运动。此时,系统状态方程为:

$\dot{X}(t) = AX(t)$, 假设初始条件为 $X(t_0) = X_0$, 当存在某 $n \times n$ 矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 满足如下两条件:

$$\Phi(t-t_0) = A\Phi(t-t_0), \quad \Phi(0) = I$$

则自由运动的解为:

$$X(t) = \Phi(t-t_0)X_0$$

2. 状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$

满足以上两条件的矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 称为状态转移矩阵。系统在状态空间中任一时刻 t 的状态 $X(t)$, 可视为系统的初始状态 $X(t_0)$ 通过该矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 的转移而得到。

对于线性定常系统, 有:

$$\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k + \cdots$$

线性定常系统的状态转移矩阵又称为矩阵指数, 它是时间差 $(t-t_0)$ 的函数。

对于线性时变系统, 状态转移矩阵写为 $\Phi(t, t_0)$, 它是时刻 t, t_0 的函数; 但它一般不能写成指数形式。其一般形式如下:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = & I + \int_{t_0}^t A(\tau_0) d\tau_0 + \int_{t_0}^t A(\tau_0) \int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_0 \\ & + \int_{t_0}^t A(\tau_0) \int_{t_0}^{\tau_0} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau_0 + \cdots \end{aligned}$$

对于线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ (即矩阵指数 e^{At}), 具有如下性质或结论:

- ① $\Phi(t) = A\Phi(t)$;
- ② $\Phi(0) = I$;
- ③ $\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$;
- ④ $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$;
- ⑤ $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$;
- ⑥ $[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$, k 为整数;
- ⑦ $\exp(P^{-1}APt) = P^{-1}\exp(At)P$, P 为非奇异矩阵;
- ⑧ $\exp(At)\exp(Bt) = \exp[(A+B)t]$, 当 A, B 为可交换矩阵即 $AB=BA$ 时成立;
- ⑨ 若有 $A = \delta I + B$, 其中 δ 为标量, B 为方阵, 则 $\exp(At) = \exp(\delta t)\exp(Bt)$;
- ⑩ $\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$.

而线性时变系统的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 仅具有如下六个性质或结论:

- ① $\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$;
- ② $\Phi(t, t) = I$;
- ③ $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0)\Phi(t) \neq \Phi(t)\Phi(t_0)$;
- ④ $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$;
- ⑤ $\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau)A(\tau)$;

- ⑥ 当且仅当 $A(t)$ 和 $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ 为可交换时, 即 $A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] A(t)$

时, 则 $\Phi(t, t_0)$ 可由如下的矩阵指数给出:

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right)$$

3. 状态转移矩阵的求法

方法一：根据定义式计算 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n t^n$$

此法具有步骤简便和编程容易的优点，适合于计算机计算。但是采用此法难于获得解析形式的结构。

方法二：利用拉氏反变换法求 $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

该方法便于手工计算和理论分析，当系统的阶数大于 2 时，计算比较麻烦。但是该法是一种主要的方法，必须掌握。

方法三：将 e^{At} 化为 A 的有限多项式来求解

根据凯利-哈密尔顿定理，可将状态转移矩阵的定义式中这个无穷级数化为 A 的有限多项式： $e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1}$ ，式中 $a_0(t)$ ， $a_1(t)$ ， \cdots ， $a_{n-1}(t)$ 为 t 的函数，其求法如下：

(1) A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互异时：

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(2) A 有 n 个相同的特征值 λ_1 即 n 重根时：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-3}(t) \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 1 & (n-1)\lambda_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \prod_{i=2}^3 (n-i) & \prod_{i=1}^2 (n-i) \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & (n-2)\lambda_1^{-3} & (n-1)\lambda_1^{-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_1 t} \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $p_0, p_1, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1}$ 为行向量，有 $p_0 = (1, \lambda_1, \lambda_1^2, \cdots, \lambda_1^{n-1})$ ，

$$p_1 = \frac{\partial p_0}{\partial \lambda_1}, p_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \lambda_1^2}, \cdots, p_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k p_0}{\partial \lambda_1^k}, \cdots, p_{n-1} = (0 \cdots 0 \ 1)$$

$$c_0 = e^{\lambda_1 t}, c_1 = \frac{\partial c_0}{\partial \lambda_1}, c_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 c_0}{\partial \lambda_1^2}, \cdots, c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k c_0}{\partial \lambda_1^k}, \cdots, c_{n-1} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_1 t}$$

(3) A 的特征值有 r 个单根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, 另外有 l 个重根 $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_{r+l}$, 每个重根的次重数分别为 $l_{r+1}, l_{r+2}, \dots, l_{r+l}$, 有 $l_{r+1} + l_{r+2} + \dots + l_{r+l} = n - r$; 则有:

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{r-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{r+1} \\ \vdots \\ M_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{r+1} \\ \vdots \\ N_r \end{bmatrix}$$

其中

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix}_{r \times n} \quad N_r = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_r t} \end{bmatrix}_{r \times 1}$$

而

$$M_{r+i} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_{r+i}^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_{r+i} & \dots & (n-1)\lambda_{r+i}^{n-2} \\ 1 & \lambda_{r+i} & \lambda_{r+i}^2 & \dots & \lambda_{r+i}^{n-1} \end{bmatrix}_{l_{r+i} \times n}$$

$$N_{r+i} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_{r+i} t} \\ t e^{\lambda_{r+i} t} \\ e^{\lambda_{r+i} t} \end{bmatrix}_{l_{r+i} \times 1} \quad i = 1, 2, \dots, l$$

方法四: 将 A 变换为规范型 \bar{A}

因 $A = T^{-1} \bar{A} T$, 则有 $e^{At} = T^{-1} e^{\bar{A}t} T$. 规范型 \bar{A} 所对应的状态转移矩阵具有如下表达式:

$$\text{当 } \bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 时, 则}$$

$$e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\text{当 } \bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ 时, 则}$$

$$e^{\bar{A}t} = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $\bar{A} = \begin{pmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{pmatrix}$ 时, 则

$$e^{At} = e^{\delta t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

当 $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_{r+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{r+l} \\ & & & & M_{n1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & M_{nn} \end{bmatrix}$ 时, 则

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & & \\ & e^{A_{r+1} t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_{r+l} t} \\ & & & & e^{M_{n1} t} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & e^{M_{nn} t} \end{bmatrix}$$

4. 受控运动的解

在控制作用下的运动称为受控(强迫)运动。数学表征为非齐次状态方程。

若非齐次状态方程 $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$, $X(t_0) = X_0$ 的解存在, 则必具有如下形式:

$$X(t) = \Phi(t - t_0)X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BU(\tau) d\tau$$

$$Y(t) = C\Phi(t - t_0)X_0 + C \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BU(\tau) d\tau + DU(t)$$

可见, 系统的输出 $Y(t)$ 由三部分组成: 第一部分是输入向量为零时, 初始状态 $X(t_0)$ 激励引起的, 是系统的零输入响应; 第二部分是当初始向量 $X(t_0)$ 为零时, 输入向量引起的, 为系统的零状态响应; 第三部分是系统的直接传输部分。而状态 $X(t)$ 由两部分组成: 第一部分为零输入时的状态响应; 第二部分为零状态时的状态响应。

当系统为时变系统即 $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$ 时, 其解的形式如下:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)U(\tau) d\tau$$

9.5 离散系统与连续系统离散化

1. 离散系统

设线性定常离散系统的自由运动的状态方程为 $X(k+1) = GX(k)$, 显然有状态转移矩阵为 $\Phi(k) = G^k$, 自由运动的解为 $X(k) = \Phi(k)X(0)$ 。

$\Phi(k)$ 具有与连续系统相同的性质。如：

$$\Phi(k+1)=G\Phi(k), \Phi(0)=I, \Phi(k_2)=\Phi(k_2-k_1)\Phi(k_1), \Phi^{-1}(k)=\Phi(-k)$$

对于 $\Phi(k)$ 的求解可按上式，也可用 z 的反变换方法，即

$$\Phi(k)=G^k=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}z]$$

也可采用线性连续系统中所介绍的方法。只是要注意的是：此时特征方程为 $f(z)=\det(zI-G)=0$ ；每一特征根 z_i 所对应的运动模态为 $(z_i)^k$ ；而连续系统的每一特征根 s_i 所对应的运动模态为 $e^{s_i t}$ 。

对于离散系统的受控运动状态方程：

$$X(k+1)=GX(k)+HU(k)$$

其运动的解为：

$$X(k)=\Phi(k)X(0)+\sum_{i=1}^{k-1}\Phi(k-i-1)HU(i)$$

其中

$$\sum_{i=1}^{k-1}\Phi(k-i-1)HU(i)=Z^{-1}[(zI-G)^{-1}HU(z)]$$

2. 线性连续系统的离散化

设线性连续系统的运动方程为：

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t) \\ Y(t)=C(t)X(t)+D(t)U(t) \end{cases}$$

其离散化之后的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} X(k+1)=G(k)X(k)+H(k)U(k) \\ Y(k)=C(k)X(k)+D(k)U(k) \end{cases}$$

其中： $G(k)=\Phi[(k+1)T, kT]$ ， $H(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi[(k+1)T, \tau]B(\tau) d\tau$ ， $C(k)=C(t)|_{t=kT}$ ， $D(k)=D(t)|_{t=kT}$ ， T 为采样周期。

对于时变系统，因其状态转移矩阵难以求解，有时采用近似离散化，即

$$G(k)\approx TA(kT)+I \quad H(k)\approx TB(kT)$$

对于定常系统，有：

$$G(k)=\Phi(T) \quad H(k)=\int_0^T\Phi(t) dt \cdot B$$

注意：离散化可能改变系统的能控性和能观性。

9.6 能控性与能观性

在经典控制理论中，着眼于系统输入对输出的控制，而反馈控制就是通过观测输出量与期望值比较来调节控制量的。因而，输出量明显地受输入信号的控制，同时也能观测，即系统不存在能控、不能控和能观、不能观的问题。而现代控制理论着眼于研究系统状态的控制和观测。这时就遇到系统状态的能控性和能观性问题。

1. 能控性

线性系统 $\dot{X} = AX + BU$, 若给定一个初始非零状态 $X(t_0)$ (t_0 可为零), 如果在 $t_1 > t_0$ 的有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内, 存在容许控制 $U(t)$ 使 $X(t_1) = 0$, 则称系统状态在 t_0 时刻是能控的; 如果系统对任意一个初始状态都能控, 则称系统是状态完全能控的, 简称系统是状态能控的或系统是能控的。

能控性判断方法具有如下几种:

方法一: 线性系统状态能控的充要条件是格拉姆(Gramian)矩阵 $W_c(t_0, t_1)$ 为非奇异的矩阵, 即其秩为 n 。

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

该判据对线性定常和线性时变系统都成立, 是根本的方法。

方法二: 对于线性定常系统, 可将方法一简化为能控的充要条件是能控性矩阵 Q_c 为满秩的。

$Q_c = [BAB A^2B \cdots A^{n-1}B]_{n \times nr}$ 其中 n 为系统的阶次, r 为输入量的个数。

对于离散系统 $X(k+1) = GX(k) + HU(k)$, 能控的充要条件也是要求能控矩阵 M_c 为满秩的。

$$M_c = [HGH G^2H \cdots G^{n-1}H]_{n \times nr}$$

需要注意的是, 若连续系统是能控的, 其离散化后的离散系统不一定是能控的, 也就是说, 离散化可能改变能控性。

方法三: 若对系统 (A, B) 进行非奇异线性变化为 (\bar{A}, \bar{B}) , 其中 \bar{A} 为规范型, 则能控性由 \bar{B} 的每行元素是否全为零的特性所决定, 具体如下:

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_{r+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{r+i} \end{bmatrix}$$

其中 A_1 为对角矩阵块, $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+i}$ 为约当矩阵块。

若与对角矩阵块 A_1 的每行所对应的 \bar{B} 阵中的每行所有元素不全为零, 且每个约当矩阵块 $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+i}$ 的最下面一行所对应的 \bar{B} 阵中的行的所有元素不全为零, 则系统 (A, B) 是能控的。该方法同样适合离散系统。

说明: A_1 内的对角线上的值应互不相等, $A_1, A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+i}$ 矩阵块之间对角线上的元素也应互不相等; 若出现相等的情况, 除了 \bar{B} 阵中的相应行所有元素不全为零外, 还要求出现相等时所对应的 \bar{B} 阵中行向量之间互不相关。

方法四: PBH 判据法。即系统能控的充要条件是 $n \times (n+r)$ 矩阵 $[\lambda I - A : B]$ 对 A 的所有特征值 λ_i 之秩都是 n , 即 $\text{rank}[\lambda_i I - A : B] = n$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

对于离散系统 (G, H) , 需满足条件: $\text{rank}[\lambda_i I - G : H] = n$ 。

方法五: 传递函数矩阵法。若系统的状态向量与输入向量之间的传递函数矩阵 $G_m(s) = [sI - A]^{-1}B$ 的 n 行线性无关, 则系统能控。

对于单输入系统, 该结论简化为传递函数 $G(s) = c[sI - A]^{-1}b$ 没有零极点抵消。

对于时变系统 $(A(t), B(t))$, 能控的充要条件是矩阵 $\Phi(t_0, t)B(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ 的行向

量线性无关。

对于离散系统具有相同的结论。

方法六：对于单输入系统 (A, b) ，若能通过非奇异线性变换化为能控规范型，则系统完全能控。

2. 系统输出能控性

考虑到在控制系统的分析、设计和实际运行中，总是希望对输出 $Y(t)$ 实行控制，所以在研究状态能控性的同时，也必须研究输出能控性问题。输出能控性定义如下：

线性系统 $\dot{X}=AX+BU$ ，若任意给定一个非零的初始输出 $Y(t_0)$ (t_0 可为零)，如果在 $t_1 > t_0$ 的有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内，存在容许控制 $U(t)$ 使 $Y(t_1)$ 达到预先指定的任意位置，则称系统输出完全能控，简称系统输出能控。

输出能控性判据是：系统 (A, B, C) 输出能控的充要条件是其输出能控性矩阵 Q_{out} 为满秩的，即当系统有 q 个输出时，其秩为 q 。

$$Q_{out} = [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \cdots \quad CA^{n-1}B]_{q \times nr}$$

应当指出，控制系统的输出能控性和状态的能控性之间不是等价的，即输出能控不会必然状态能控；反之，状态能控也不会必然导致输出能控。

3. 能观性

线性系统 $\dot{X}=AX+BU, Y=CX$ ，如果在 $t_1 > t_0$ 的有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内，通过观测 $Y(t)$ ，就能够唯一地确定系统的初始状态 $X(t_0)$ ，则称系统状态在 t_0 时刻是能观测的；如果对任意初始状态都能观测，则称系统是状态完全能观测的，简称系统是状态能观测的或系统是能观测的。

能观测性判据方法具有如下几种：

方法一：线性系统状态能观测的充要条件是格拉姆(Gramian)矩阵 $W_o(t_0, t_1)$ 为非奇异的矩阵，即其秩为 n 。

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

该判据对线性定常和线性时变系统都成立，是根本的方法。

方法二：对于线性定常系统，可将方法一简化为：能观测的充要条件是能观测性矩阵 Q_o 为满秩的。

$Q_o = [C^T; (A^T)C^T; (A^T)^2C^T; \cdots; (A^T)^{n-1}C^T]_{n \times nq}$ ；其中 n 为系统的阶次， q 为输出量的个数。

对于离散系统 $X(k+1)=GX(k)+HU(k), Y(k)=CX(k)$ ，能观测的充要条件也是要求能观测性矩阵 M_o 为满秩的。

$$M_o = [C^T; (G^T)C^T; (G^T)^2C^T; \cdots; (G^T)^{n-1}C^T]_{n \times nq}$$

需要注意的是，若连续系统是能观测的，其离散化后的离散系统不一定是能观测的，也就是说离散化可能改变能观测性。

方法三：若对系统 (A, C) 进行非奇异线性变化为 (\bar{A}, \bar{C}) ，其中 \bar{A} 为规范型，则能观测性由 \bar{C} 的每列元素是否全为零的特性所决定，具体如下：

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_{r+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{r+l} \end{bmatrix}$$

其中 A_1 为对角矩阵块, $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+l}$ 为约当矩阵块。

若与对角矩阵块 A_1 每行所对应 \bar{C} 阵中的每列所有元素不全为零, 且每个约当矩阵块 $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+l}$ 的最前面一列所对应 \bar{C} 阵中的列的所有元素不全为零, 则系统 (A, C) 是能观的。该方法同样适合离散系统。

说明: A_1 内的对角线上的值应互不相等, $A_1, A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+l}$ 矩阵块之间对角线上的元素也应互不相等; 若出现相等的情况, 除了 \bar{C} 阵中的相应列所有元素不全为零外, 还要求出现相等时所对应的 \bar{C} 阵中列向量之间互不相关。

方法四: PBH 判据法。即系统能观测的充要条件是 $(n+q) \times n$ 矩阵 $[C^T : (\lambda I - A)^T]$ 对 A 的所有特征值 λ_i 之秩都是 n 。即 $\text{rank}[C^T : (\lambda I - A)^T] = n \ (i=1, 2, \dots, n)$ 。

对于离散系统 (G, C) , 需满足条件: $\text{rank}[C^T : (\lambda I - G)^T] = n$ 。

方法五: 传递函数矩阵法。若系统的输出向量与状态向量之间的传递函数矩阵 $G_{yx}(s) = C[sI - A]^{-1}$ 的 n 列向量线性无关, 则系统能观测。

对于单变量系统, 该结论简化为传递函数 $G(s) = c[sI - A]^{-1}b$ 没有零极点抵消。

对于时变系统 $(A(t), C(t))$, 能观测的充要条件是矩阵 $C(t)\Phi(t, t_0), t \in [t_0, t_1]$ 的 n 列向量线性无关。

对于离散系统具有相同的结论。

方法六: 对于单输入系统 (A, b) , 若能通过非奇异线性变换化为能观测规范型, 则系统完全能观测。

4. 能控性与能观测性的对偶关系

若两个系统 $S_1: (A_1, B_1, C_1)$ 和 $S_2: (A_2, B_2, C_2)$ 满足下列关系:

$$A_1 = A_2^T, B_1 = C_2^T, C_1 = B_2^T$$

则称系统 S_1 和 S_2 是互为对偶的。

互为对偶的系统具有如下特征:

- (1) 对偶的两个系统的传递矩阵互为转置, 即 $G_1(s) = G_2^T(s)$
- (2) 对偶的两个系统的特征值相同, 即 $|\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_2|$
- (3) 系统 S_1 的能控性等价于系统 S_2 的能观测性; 系统 S_1 的能观测性等价于系统 S_2 的能控性; 这就是对偶原理。

5. 连续系统离散化后的能控性和能观测性

线性定常系统运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

离散化后的系统方程为:

$$\begin{cases} X(k+1) = GX(k) + HU(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases}$$

其中 $G = e^{AT}$, $H = \left[\int_0^T e^{A^*} dt \right] B$, T 是采样周期。

离散化后有如下结论:

(1) 如果连续系统不能控(不能观测), 则离散化后系统必定不能控(不能观测)。其逆关系一般不成立。

(2) 若离散化后系统能控(能观测), 则离散化前连续系统是能控(能观测)的。其逆关系一般不成立。

(3) 如果连续系统能控(能观测), 离散化后系统能否保持原连续系统的特性取决于采样周期的选择。若原连续系统 A 的全部特征值互异, 即 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$, 那么当采样周期的选择满足: 对于一切 $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, 有

$$T \neq \frac{2k\pi}{\operatorname{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

则离散化后系统仍是能控(能观测)的。

6. 能控性、能观测性与传递函数(矩阵)的关系

一个线性定常系统, 可以用传递函数(矩阵)进行外部描述, 也可以用状态空间表达式描述。后者描述既能反映外部特性, 又能揭示系统内部特性如能控性、能观测性。这两种描述都是对同一系统而言的, 它们之间必有一定关系。具体关系如下:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = \frac{C \cdot \operatorname{adj}[sI - A] \cdot B}{\det[sI - A]} = C \cdot \frac{N(s)}{d(s)} \cdot B$$

其中: $d(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + a_{l-2}s^{l-2} + \dots + a_1s + a_0$, $l \leq n$ 为最小多项式;

$N(s) = p_0(s)I + p_1(s)A + p_2(s)A^2 + \dots + p_{l-1}(s)A^{l-1} + p_l(s)A^l$, $l \leq n$ 为矩阵多项式, 其系数多项式为:

$$\begin{cases} p_0(s) = s^{l-1} + a_{l-1}s^{l-2} + a_{l-2}s^{l-3} + \dots + a_2s + a_1 \\ p_1(s) = s^{l-2} + a_{l-1}s^{l-3} + \dots + a_3s + a_2 \\ \vdots \\ p_{l-2}(s) = s + a_2 \\ p_{l-1}(s) = s + 1 \end{cases}$$

$\eta(s)$ 为特征多项式 $\det[sI - A]$ 和伴随矩阵 $\operatorname{adj}[sI - A]$ 的最大公因子, 即有

$$d(s) = \det \frac{sI - A}{\eta(s)}, \quad N(s) = \operatorname{adj} \frac{sI - A}{\eta(s)}$$

最小多项式具有如下性质:

- (1) 最小多项式的零点必定不是矩阵多项式的零点;
- (2) 对于单输入单输出系统, 最小多项式等同其特征多项式;
- (3) 矩阵多项式 $N(s)$ 和 A 可以交换, 即 $N(s)A = AN(s)$;
- (4) 根据凯利-哈密尔顿定理, A 必满足其本身的零化多项式, 即 $d(A) = 0$;
- (5) 对同一系统, 非奇异的线性变换不改变其传递函数矩阵。

用传递函数矩阵判别系统的能控性和能观测性有如下结论:

结论一: 线性定常系统 (A, B, C) 是状态完全能控的, 则其状态一输入的传递函数矩阵在形式: $[sI - A]^{-1}B = \frac{N(s)}{d(s)} \cdot B$ 下, 不能有相消的因子, 即不能有零极点相消的现象。

结论二：线性定常系统(A, B, C)是状态完全能观测的，则其状态—输出的传递函数矩阵在形式： $C[sI - A]^{-1} = C \cdot \frac{N(s)}{d(s)}$ 下，不能有相消的因子，即不能有零极点相消的现象。

结论三：线性定常系统(A, B, C)是状态完全能控且能观测的，则其输入—输出的传递函数矩阵在形式： $C[sI - A]^{-1}B = C \cdot \frac{N(s)}{d(s)} \cdot B$ 下，不能有相消的因子，即不能有零极点相消的现象。

9.7 系统的结构分解与实现问题

一般来说，线性系统不一定是完全能控的和完全能观测的；那么在系统结构上，必包括能控、不能控和能观测、不能观测的子系统，即将系统的状态空间相应地分解成四个子空间，也就是将状态变量分解为能控能观测的变量 X_{co} 、能控不能观测的变量 X_{cn} 、能观测不能控的变量 X_{nc} 和不能控不能观测的变量 X_{nc} ，有 $\bar{X} = [X_{co} \ X_{cn} \ X_{nc} \ X_{nc}]^T$ 。由于非奇异线性变换不改变系统的能控性和能观测性，因此可以采用线性变换的方法对一般形式的系统方程进行变换，实现能控性和能观测性分解。

系统的传递函数矩阵描述只能反映能控能观测的子系统特性，因而它只是对系统的一种不完全的描述。只有当系统是能控能观测时，传递函数描述和状态空间描述才是等价的。状态空间描述可以描述上述的四个子空间，所以状态空间的描述是一种揭示系统内部联系的完全的描述。

1. 能控性分解

设线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

其能控性矩阵 $Q_c = [BAB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]_{n \times n}$ ，的秩 $\text{rank} Q_c = n_1 < n$ ，即系统是不完全能控的，则存在非奇异变换 $X = R_c \bar{X} = T^{-1} \bar{X}$ 。

将系统状态空间表达式变换为：

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{B}U(t) \\ Y(t) = \bar{C}\bar{X}(t) \end{cases}$$

其中：

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_c \\ \bar{X}_c \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix}, \quad \bar{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \underline{0} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix}$$

$$\bar{B} = R_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix}, \quad \bar{C} = C R_c = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix}$$

能控性分解将系统分成两部分：

(1) 能控部分。能控的 n_1 维子系统为：

$$\dot{\bar{X}}_c(t) = \bar{A}_{11} \bar{X}_c + \bar{B}_1 U + \bar{A}_{12} \bar{X}_c$$

(2) 不能控部分。不能控的 $n-n_1$ 维子

系统为: $\dot{\bar{X}}_c(t) = \bar{A}_{22}\bar{X}_c$ 。结构分解情况参见图 9-5。从图 9-5 可见输入 U 不影响不能控的变量 \bar{X}_c 的运动, 因而 \bar{X}_c 是不能控的。

非奇异变换矩阵 $T^{-1} = R_c = [R_1 \ R_2 \ \cdots \ R_n]$ 中的 n 列向量 R_i 可按下述方法构成: 前 n_1 个列向量 R_1, R_2, \dots, R_{n_1} 取能控性矩阵 Q_c 中 n_1 个线性无关的列向量; 另外 $n-n_1$ 个列向量 $R_{n_1+1}, R_{n_1+2}, \dots, R_n$ 在保证 R_c 为非奇异的条件下, 完全是任意的。

2. 能观测性分解

设线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

其能观测性矩阵

$$Q_o = [C^T : (A^T)C^T : (A^T)^2 C^T : \cdots : (A^T)^{n-1} C^T]_{n \times n_o}$$

的秩 $\text{rank} Q_o = n_2 < n$, 即系统是不完全能观测的。则存在非奇异变换 $X = R_o \bar{X} = T^{-1} X$, 将系统状态空间表达式变换为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{B}U(t) \\ Y(t) = \bar{C}\bar{X}(t) \end{cases}$$

其中:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_o \\ \bar{X}_c \end{bmatrix} \begin{matrix} n_2 \\ n-n_2 \end{matrix}, \quad \bar{A} = R_o^{-1} A R_o = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_2 \\ n-n_2 \end{matrix}$$

$$\bar{B} = R_o^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_2 \\ n-n_2 \end{matrix}, \quad \bar{C} = C R_o = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_2 \\ n-n_2 \end{matrix}$$

那么系统按能观测性分解成如下两部分:

(1) 能观测部分。能观测的 n_2 维子系统为:

$$\dot{\bar{X}}_o(t) = \bar{A}_{11}\bar{X}_o + \bar{B}_1 U, \quad Y = \bar{C}_1 \bar{X}_o$$

(2) 不能观测部分。不能观测的 $n-n_2$ 维子系统为:

$$\dot{\bar{X}}_c(t) = \bar{A}_{21}\bar{X}_o + \bar{A}_{22}\bar{X}_c + \bar{B}_2 U$$

结构分解情况可参见图 9-6。由图可见, 输出 Y 的运动与不能观测的变量 \bar{X}_c 无关, 因而 \bar{X}_c 是不能观测的。

非奇异变换矩阵 $T = R_o^{-1} = [R_1^T \ R_2^T \ \cdots \ R_n^T]$ 中的 n 行向量 R_i 可按下述方法构成: 前 n_2 个行向量 R_1, R_2, \dots, R_{n_2} 取能观测性矩阵 Q_o 中 n_2 个线性无关的行向量; 另外 $n-n_2$ 个行向量 $R_{n_2+1}, R_{n_2+2}, \dots, R_n$ 在保证 R_o 为非奇异的条件下, 完全是任意的。

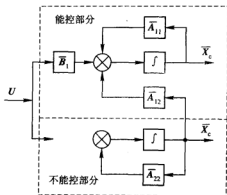


图 9-5 能控性分解

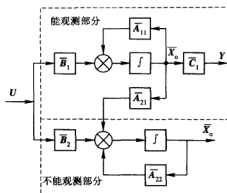


图 9-6 能观性分解

3. 能控能观测性分解

设线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

其能控性矩阵 $Q_c = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]_{n \times n}$, 的秩 $\text{rank } Q_c = n_1 < n$, 即系统是不完全能控的。其能观测性矩阵 $Q_o = [C^T : (A^T)C^T : (A^T)^2C^T : \cdots : (A^T)^{n-1}C^T]_{n \times n_o}$ 的秩 $\text{rank } Q_o = n_2 < n$, 即系统也是不完全能观测的。则存在非奇异变换 $X = R_{co}\bar{X}$ 。将系统状态空间表达式变换为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{B}U(t) \\ Y(t) = \bar{C}\bar{X}(t) \end{cases}$$

其中: $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{co} \\ \bar{X}_{no} \\ \bar{X}_{co} \\ \bar{X}_{no} \end{bmatrix}$, $\bar{A} = R_{co}^{-1}AR_{co} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{44} \end{bmatrix}$

$$\bar{B} = R_{co}^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = CR_{co} = [\bar{C}_1 \quad 0 \quad \bar{C}_2 \quad 0]$$

能控能观性分解将系统分成四部分:

(1) 第一部分为能控能观测的 n_1 -维子系统, 为

$$\dot{\bar{X}}_{co}(t) = \bar{A}_{11}\bar{X}_{co} + \bar{B}_1U + \bar{A}_{13}\bar{X}_{no}$$

即系统 $\Sigma_1(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 。

(2) 第二部分为能控不能观测的 n_1 -维子系统, 为

$$\dot{\bar{X}}_{no}(t) = \bar{A}_{21}\bar{X}_{co} + \bar{A}_{22}\bar{X}_{no} + \bar{A}_{23}\bar{X}_{co} + \bar{A}_{24}\bar{X}_{no} + \bar{B}_2U$$

即系统 $\Sigma_2(\bar{A}_{22}, \bar{B}_2, \mathbf{0})$ 。

(3) 第三部分为不能控能观测的 n_{2+} 维子系统, 为

$$\dot{\bar{X}}_{10}(t) = \bar{A}_{11}\bar{X}_{10}$$

即系统 $\Sigma_3(\bar{A}_{33}, \mathbf{0}, \bar{C}_3)$ 。

(4) 第四部分为不能控不能观测的 n_{2-} 维子系统, 为

$$\dot{\bar{X}}_{20}(t) = \bar{A}_{43}\bar{X}_{10} + \bar{A}_{44}\bar{X}_{20}$$

即系统 $\Sigma_4(\bar{A}_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ 。

其中 $n_{1+} + n_{1-} = n_1$, $n_{1+} + n_{2+} = n_2$ 。

$$Y = \bar{C}_1\bar{X}_{10} + \bar{C}_3\bar{X}_{20}$$

结构分解情况参见图 9-7。从图 9-7 可见, 输入 U 不影响不能控的变量 \bar{X}_2 的运动, 因而 \bar{X}_2 是不能控的。非奇异变换矩阵 R_{co} 的构成方法分为三步:

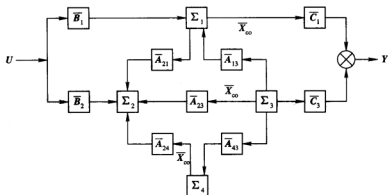


图 9-7 能控性能观性分解

首先对系统 (A, B, C) 按能控性分解方法获得 R_c , 有如下关系:

$$X = R_c \begin{bmatrix} X_c \\ X_c \end{bmatrix}, A_1 = R_c^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \mathbf{0} & \bar{A}_4 \end{bmatrix}, B_1 = R_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_1 = C R_c = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2]$$

其次对能控子系统 $(\bar{A}_1, \bar{B}, \bar{C}_1)$ 按能观测性分解获得 $n_1 \times n_1$ 方阵 R'_{co} , 将其同 $(n-n_1) \times (n-n_1)$ 单位矩阵 I_1 构成 $n \times n$ 变换矩阵

$$R_{co} = \begin{bmatrix} R'_{co} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

最后对第一步中不能控的子系统 $(\bar{A}_4, \mathbf{0}, \bar{C}_2)$ 按能观测性分解获得 $(n-n_1) \times (n-n_1)$ 方阵 R'_{co} , 将其同 $n_1 \times n_1$ 单位矩阵 I_2 构成 $n \times n$ 变换矩阵

$$R_{co} = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R'_{co} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

则有

$$R_{co} = R_{co} \cdot R_{co} \cdot R_c$$

图 9-7 中 Σ_1 符号代表输入信号通过积分输出并反馈到输入端, 即如图 9-8 所示。

尤为重要的特点是: 在系统的输入 U 与输出 Y 之间, 只存在一条惟一的单向控制通道, 即 $U \rightarrow \bar{B}_1 \rightarrow \Sigma_1 \rightarrow \bar{C}_1 \rightarrow Y$ 。显然, 反映系统输入输出特性的传递函数 $G(s)$ 只能反映系统中能控且能观测的那个子系统的运动特性。有

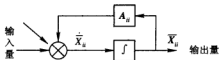


图 9-8 积分输出

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = \bar{C}_1[sI - \bar{A}_{11}]^{-1}\bar{B}_1$$

上式也说明, 传递函数只是对系统的一种不完全的描述, 如果在系统中添加(或去掉)不能控或不能观测的子系统(如上图中的 Σ_2 或 Σ_3 或 Σ_4), 并不影响系统的传递函数。因而根据给定传递函数阵求对应的状态空间表达式, 其解将有无穷多个。但是其中维数最小的那个状态空间表达式是最常用的, 这就是最小实现问题。

4. 实现问题

由给定的传递函数建立与系统输入输出特性等价的状态空间表达式的问题, 就是实现问题。从严格理论上说, 就是对于给定传递函数 $G(s)$, 若有一状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

使下式成立:

$$C[sI - A]^{-1}B + D = G(s)$$

则称该状态空间表达式为传递函数 $G(s)$ 的一个实现。

显然, 若系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 是传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个实现, 则系统 $\Sigma(A^T, B^T, C^T, D^T)$ 也必是传递函数矩阵 $G^T(s)$ 的一个实现。

1) 能控标准型实现和能观测型实现

若给定的传递函数矩阵为:

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0}$$

式中 $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \cdots, \beta_1, \beta_0$ 为 $q \times r$ 维常数矩阵, 分母多项式为该传递函数的特征多项式。

显然 $G(s)$ 是一个严格的真有理分式矩阵, 且当 $r=q=1$ 时, $G(s)$ 就是单输入单输出系统的传递函数。

对于如上形式的传递函数矩阵的能控标准型实现为:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_r & I_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ 0_r & 0_r & I_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_r & 0_r & 0_r & \cdots & I_r \\ -a_0 I_r & -a_1 I_r & -a_2 I_r & \cdots & -a_{n-1} I_r \end{bmatrix}_{nr \times nr} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0_r \\ 0_r \\ \vdots \\ 0_r \\ I_r \end{bmatrix}_{nr \times r}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]_{q \times nr}$$

式中: 0_r 和 I_r 为 $r \times r$ 阶零矩阵和单位矩阵; n 为传递函数矩阵的分母多项式的阶次。依此类似, 其能观测标准型为:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & -a_0 I_q \\ I_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & -a_1 I_q \\ 0_q & I_q & 0_q & \cdots & 0_q & -a_2 I_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & 0_q & -a_{n-2} I_q \\ 0_q & 0_q & 0_q & \cdots & I_q & -a_{n-1} I_q \end{bmatrix}_{nq \times nq}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}_{nq \times r}$$

$$C_c = [0_q \quad 0_q \quad 0_q \quad \cdots \quad 0_q \quad I_q]_{q \times nq}$$

式中: 0_q 和 I_q 为 $q \times q$ 阶零矩阵和单位矩阵; n 为传递函数矩阵的分母多项式的阶次。

显然可见, 能控标准型的维数是 $n \times r$, 能观测标准型的维数是 $n \times q$ 。最后应该指出, 多输入多输出系统的能控标准型并不是能观测标准型的简单转置, 这一点和单变量系统是不同的, 也就是对于单输入单输出系统, 能控标准型和能观测标准型是对偶关系。

2) 标量传递函数的串联实现和并联实现

当 $r=q=1$ 时, 传递函数矩阵为特殊矩阵即标量传递函数 $G(s)$, 当然此时仍可按能控标准型和能观测标准型实现。它还有较简便的方法, 即串联实现和并联实现。

若 $G(s)$ 为真有理分式而不是严格的真有理分式, 仍可按式 $D = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ 判断, D 为标量。不失一般性, 假设 $G(s)$ 仍具有上述形式, $G(s)$ 为严格的真有理分式, 只是此时 β_i 为标量。

(1) 串联实现: 如果传递函数的分子和分母的多项式都能进行因式分解, 这时采用串联实现较简便。假设 $G(s)$ 的零极点分别为 z_1, z_2, \dots, z_{n-1} 和 s_1, s_2, \dots, s_n , 则可将 $G(s)$ 表示为 n 项积的形式:

$$G(s) = \beta_{n-1} \frac{1}{s-s_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{s-z_i}{s-s_i} = \beta_{n-1} \frac{1}{s-s_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{s_i-z_i}{s-s_i} \right)$$

其串联实现为:

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & & & & \\ s_2 - z_2 & s_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ s_{n-1} - z_{n-1} & \cdots & s_{n-1} - z_{n-1} & s_{n-1} & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & s_n \end{bmatrix} \quad b = \beta_{n-1} \begin{bmatrix} s_1 - z_1 \\ s_2 - z_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} - z_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) 并联实现: 如果传递函数的分母 s 多项式能够比较容易地进行因式分解, 化为实数极点表示的形式; 假设 s_i 为传递函数 $G(s)$ 的 l_i 重极点, $l_1 + l_2 + \cdots + l_p = n$, $i=1, 2, \dots, p$, 当 $i \neq k$ 时 $s_i \neq s_k$, 则传递函数可以表示成 n 项和的形式:

$$G(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{l_i} \frac{\beta_k}{(s-s_i)^k}$$

其并联实现为:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad A_i = \begin{bmatrix} s_i & 1 & & \\ & s_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix}_{l_i \times l_i}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{l_i \times 1}$$

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_p]_{1 \times n}, \quad c_i = [\beta_{i1} \quad \cdots \quad \beta_{i2} \quad \beta_{i1}]_{1 \times l_i}$$

(3) 最小实现: 当系统的传递函数矩阵给定时, 可以通过上述实现方法求得系统的状态空间表达式。一般地说这样的实现不是惟一的; 不仅同一个传递函数矩阵有不同的实现, 而且实现的维数也可能不同。

在所有的实现中, 维数最小的实现称为最小实现, 也称为不可简约的实现。同一传递函数矩阵的最小实现也不是惟一的, 但其最小实现的维数是惟一的, 且它们之间存在非奇异变换关系。最小实现具有下述定理:

系统 $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$ 为传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个最小实现的充要条件是系统

$\Sigma(A, B, C)$ 既是能控的又是能观测的。

求取最小实现一般可以按照如下步骤进行:

a) 对给定的传递函数矩阵 $G(s)$, 先初选出一种实现 $\Sigma(A, B, C)$, 通常最方便的是选取能控标准型或能观测标准型。

b) 对上面初选的实现 $\Sigma(A, B, C)$, 找出其完全能控且完全能观测的部分 $\Sigma(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$, 该能控能观测的子系统就是 $G(s)$ 的最小实现。

9.8 李亚普诺夫的稳定性

在经典控制理论中, 对于线性系统, 其稳定性只取决于系统的结构和参数, 而与系统的初始条件及外界扰动的大小无关, 因此线性系统的稳定性是全局的, 其稳定性的判别方法不具有一般定义。非线性系统的稳定性不仅与系统的结构和参数有关, 而且与系统的初始条件及外界扰动的大小有关, 因此它的稳定性是局部性的。

李亚普诺夫针对非线性系统的特点, 提出了一种有关稳定性的一般定义, 这个定义是针对平衡点及其邻域的, 不同于线性系统的全局性稳定定义。李亚普诺夫第一法是针对线性系统的, 而李亚普诺夫第二法是一种普遍适用于线性系统、非线性系统及时变系统的稳定性判别方法。

设系统的齐次状态方程为 $\dot{x} = f(x, t)$, 式中, x 为 n 维状态向量; f 为与 x 同维的向量函数, 它是 x 的各分量 x_1, x_2, \dots, x_n 和时间 t 的函数。一般地, f 为时变的非线性函数。如果不显含时间 t , 则为定常(或自治)系统。

1. 平衡状态或平衡点

设系统 $\dot{x} = f(x, t)$ 存在状态向量 x_e , 对所有的 t , 均有 $\dot{x}|_{x=x_e} = f(x_e, t) = 0$, 则称 x_e 为系统的平衡状态或平衡点。

对于线性定常系统, 有

$$\dot{x}|_{x=x_e} = f(x_e, t) = AX_e = 0$$

当 A 为非奇异矩阵时, 必有 $x_e = 0$, 故线性定常系统只有一个平衡点。

对于非线性系统, 它的平衡点可能不止一个, 稳定性可能也是不相同的。

2. 李亚普诺夫稳定性定义

设非线性时变系统状态方程为 $\dot{x} = f(x, t)$, x_e 为平衡状态。如果对于任意的实数

$\epsilon > 0$, 都对应地存在实数 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 使得由满足不等式: $\|x(t_0) - x_r\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$ 的任意初始状态 $x(t_0) = x_0$ 出发的状态轨迹 $x(t)$ 有:

$$\|x(t) - x_r\| \leq \epsilon \quad \text{对所有的 } t \geq t_0$$

则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下稳定, 简称稳定。若 δ 与时间 t_0 无关, 即 $\delta = \delta(\epsilon)$, 则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下一致稳定, 简称一致稳定。

如果系统平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下是稳定的, 同时对于从充分接近 x_r 的任意一个初始状态 x_0 出发的状态轨迹 $x(t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 收敛于平衡状态 x_r , 则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下渐近稳定。若 δ 与时间 t_0 无关, 即 $\delta = \delta(\epsilon)$, 则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下一致渐近稳定, 简称一致渐近稳定。

如果系统平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下是渐近稳定的, 且初始状态 x_0 是状态空间中的任意点, 则此时的渐近稳定称为大范围渐近稳定。若 δ 与时间 t_0 无关, 即 $\delta = \delta(\epsilon)$, 则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下大范围渐近稳定, 简称大范围渐近稳定。

显然, 对于大范围渐近稳定的系统, 其必要条件是状态空间中, 只存在一个平衡状态。对于线性系统, 只要系统 x_r 是渐近稳定的, 则一定是大范围渐近稳定的。

如果对于任意的实数 $\epsilon > 0$, 都对应地存在实数 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 不论 $\delta(\epsilon, t_0)$ 取得多么小, 使得由满足不等式 $\|x(t_0) - x_r\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$ 的所有初始状态中, 至少存在一个初始状态 $x(t_0) = x_0$ 出发的状态轨迹 $x(t)$ 不满足不等式 $\|x(t) - x_r\| \leq \epsilon$, 则称平衡状态 x_r 在李亚普诺夫意义下不稳定, 简称不稳定。

有界输入—有界输出(BIBO)稳定性: 对于初始状态 $x(t_0) = 0$, 其输入向量 $u(t)$ 是有界的(即若存在 $M > 0$, 对于 $t \geq t_0$, 有 $\|u(t)\| < M$), 若存在 $C = C(u, t_0) > 0$, 使对于所有的 $t \geq t_0$ 都有 $\|y(t)\| < C$, 则称系统是有界输入—有界输出(BIBO)稳定; 若 $C = C(u) > 0$ 与时间 t_0 无关, 则称系统为 BIBO 一致稳定。其中 $y(t)$ 为系统的输出向量。

3. 稳定性判定定理(李亚普诺夫第二法)

对于自由运动的非线性时变系统 $\dot{x} = f(x, t)$, 不失一般性, 假设其平衡状态 $x_r = 0$ (对于某一定的非零平衡状态, 可通过非奇异的线性变换转化为零平衡状态), 初始状态 $x(t_0) = x_0$, 并在平衡点 $x_r = 0$ 邻域存在向量 x 的泛函 $V(x, t)$ (即称为李亚普诺夫函数 $V(x, t)$ 具有对 x 的连续的一阶偏导数, 则根据李亚普诺夫意义下稳定性定义, 对于连续系统有如下定理:

定理一: 若 $V(x, t)$ 正定且 $\dot{V}(x, t)$ 负定, 则平衡点是渐近稳定的。

定理二: 若 $V(x, t)$ 正定、 $\dot{V}(x, t)$ 负半定且 $\dot{V}(x(t, x_0, t_0), t)$ 在非零状态不恒为零, 则平衡点是渐近稳定的。如果 $\|x\| \rightarrow \infty$, 有 $V(x, t) \rightarrow \infty$, 则系统在平衡点是大范围渐近稳定的。

定理三: 若 $V(x, t)$ 正定、 $\dot{V}(x, t)$ 负半定且 $\dot{V}(x(t, x_0, t_0), t)$ 在非零状态恒为零, 则平衡点是李亚普诺夫意义下稳定的; 即出现周期运动。

定理四: 若 $V(x, t)$ 正定且 $\dot{V}(x, t)$ 正定, 则平衡点是不稳定的。

对于上述稳定的条件, 若所选取的李亚普诺夫函数与时间 t 无关, 即为 $V(x)$, 对于上述的稳定分别称为一致渐近稳定、一致大范围渐近稳定或一致稳定。

离散系统的稳定性判据: 上述定理可以平行地推广到离散系统, 只需将 $\dot{V}(x, t)$ 换成

$\Delta V(x(k), k) = V(x(k+1), (k+1)) - V(x(k), k)$ 即可。

李亚普诺夫函数：就系统稳定的观念而言，李亚普诺夫函数就是定义在状态空间上满足李亚普诺夫稳定性定理的一个向量的泛函。系统的李亚普诺夫函数与能量函数有许多相似之处，因而将李亚普诺夫函数通俗地理解为某种意义下的能量函数。

4. 线性系统的李亚普诺夫稳定性分析

对于线性系统，其李亚普诺夫函数有较为规范的构造方法。尽管该方法所构造的李亚普诺夫函数可能不是最简单的，但对于线性系统的稳定性分析，往往是简单而有效的。

设线性定常系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ，其中状态矩阵 A 是非奇异矩阵。故系统的惟一平衡状态 $x_e = 0$ 全局渐近稳定的充要条件是对给定的正定矩阵 Q ，有正定矩阵 P ，使得式 $A^T P + PA = -Q$ 成立。而系统的李亚普诺夫函数就是 $V(x) = x^T P x$ 。若 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ 除平衡点外不恒为零， Q 也可取为正半定的。

线性定常离散系统的状态方程为 $x(k+1) = Gx(k)$ ，其中状态矩阵 G 是非奇异矩阵。故系统的惟一平衡状态 $x_e = 0$ 全局渐近稳定的充要条件是对给定的正定矩阵 Q ，有正定矩阵 P ，使得式 $G^T P G + P = -Q$ 成立。而系统的李亚普诺夫函数就是 $V[x(k)] = x^T(k) P x(k)$ 。若 $\Delta V(x) = -x^T Q x$ 除平衡点外不恒为零， Q 也可取为正半定的。

根据以上定理有如下结论和推论：

1) 利用特征值判别系统的稳定性

对于线性定常系统 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ，其平衡状态 $x_e = 0$ 的李亚普诺夫稳定性定义与下述提法对应等价。

平衡点 x_e 稳定：系统所有特征值的实部均非正，且无相重的纯虚数特征值。

平衡点 x_e 渐近稳定：系统所有特征值的实部均为负数。

平衡点 x_e 不稳定：系统有实部为正的实特征值或有相重的纯虚数特征值。

2) BIBO 稳定

对于线性定常系统 (A, B, C, D) ，其 BIBO 稳定的充要条件是系统的传递函数矩阵的各元素的极点均有负实部。若系统是能控且能观测的，则 BIBO 稳定与状态稳定是等价的。

5. 李亚普诺夫方法在非线性系统中的应用

线性系统的稳定性具有全局性质，而且稳定判据的条件是充要条件。但是，非线性系统的稳定却只可能具有局部性质；例如，不是大范围渐近稳定的平衡状态，却可能是局部渐近稳定的，而局部不稳定平衡状态并不能说明系统就是不稳定的。尤为要注意的是，李亚普诺夫第二法只给出判断非线性系统渐近稳定的充分条件，而不是必要条件。下面介绍几种在一定范围比较有效的构造李亚普诺夫函数的方法。

1) 雅可比(Jacobian)矩阵法

该方法亦称克拉索夫斯基(Krasovski)法，二者表达形式略有不同，但基本思路是一致的。

设非线性系统的状态方程为 $\dot{x} = f(x)$ ，式中 x 为 n 维状态矢量， f 为与 x 同维的非线性矢量函数。假设原点 $x_e = 0$ 是其平衡状态， $f(x)$ 对 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是可微的，系统的雅可比矩阵为：

$$J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

则系统在原点渐近稳定的充分条件是：存在有正定实对称矩阵 P ，使下式所给矩阵 $Q(x) = -[J(x)^T P + P J(x)]$ 为正定的，并且 $V(x) = \dot{x}^T P x = f^T(x) P f(x)$ 是系统的一个李亚普诺夫函数。

如果当 $\|x\| \rightarrow \infty$ ，有 $V(x) \rightarrow \infty$ ，则系统在平衡点 $x_e = 0$ 是大范围渐近稳定的。

如果取 $P = I$ ，有 $Q(x) = -[J(x)^T + J(x)]$ ，称为克拉索夫斯基法。

推论：当系统为线性定常系统 $\dot{x} = Ax$ ，若矩阵 A 非奇异，且矩阵 $(A^T + A)$ 为负定，则系统的平衡状态 $x_e = 0$ 是大范围渐近稳定的。

应当指出，该方法不是一般方法。有相当一些系统，可能不存在有正定实对称矩阵 P ，使矩阵 $Q(x) = -[J(x)^T P + P J(x)]$ 为正定的条件成立，则此时该方法不能对系统稳定与否提供任何信息。

2) 变量梯度法

该方法也叫舒茨-基布逊(Shultz-Gibson)法。这个方法是基于如下事实，即如果存在一个特定的李亚普诺夫函数 $V(x)$ ，它能够确定非线性系统平衡状态的稳定性，那么 $V(x)$ 就一定具有惟一的梯度 $\nabla V(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T$ 。

基于上述的事实，由于非线性系统的李亚普诺夫函数难于直接构造，可先构造 $V(x)$ 的梯度 $\nabla V(x)$ ，然后由梯度 $\nabla V(x)$ 求出 $V(x)$ ，进行逆向构造过程。具体步骤如下：

第一步：构造梯度 $\nabla V(x)$ ，它可自由选择。但为了便于求出 $V(x)$ ，一般将 $\nabla V(x)$ 选择成如下形式：

$$\nabla V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为待定系数，它可以是常数，也可以是时间 t 的函数或状态变量的函数。为方便起见，通常 a_{ij} 选择为常数或时间 t 的函数。

当 $V(x)$ 不显含时间 t 时，则由式

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

可确定 $\dot{V}(x)$ ，此时 $\dot{V}(x)$ 中有 n^2 个待定系数 a_{ij} 。

第二步：由 $\nabla V(x)$ 的线积分求得 $V(x) = \int_0^x (\nabla V)^T dx$ ，为了使线积分路径最简单和便于求解，即要求线积分与积分路径无关，则必须保证 $\nabla V(x)$ 的总旋度为零。

$\nabla V(x)$ 的旋度为零就是要求满足 n 维广义旋度方程

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

此时线积分路径最简单, 可取如下的形式:

$$\begin{aligned} V(x) = & \int_0^{x_1(x_2=x_3=\dots=x_n=0)} \nabla V_1 dx_1 \\ & + \int_0^{x_2(x_1=x_3=x_4=\dots=x_n=0)} \nabla V_2 dx_2 + \dots \\ & + \int_0^{x_{n-1}(x_1=x_2=x_3=\dots=x_{n-2}=x_n=0)} \nabla V_{n-1} dx_{n-1} \\ & + \int_0^{x_n(x_1=x_2=x_3=\dots=x_{n-1}=x_{n-1})} \nabla V_n dx_n \end{aligned}$$

第三步: 由于假定系统是稳定的, 即 $V(x)$ 正定、 $\dot{V}(x)$ 负定或至少半负定, 进行逆向求李亚普诺夫函数 $V(x)$, 可根据 $\dot{V}(x)$ 负定或至少半负定的要求, 对第一步所确定的 $V(x)$ 中的待定系数 a_{ij} 进行选取。 a_{ij} 的选取遵循的原则是使 $V(x)$ 负定或至少是半负定的, 同时保证 $\nabla V(x)$ 的总旋度为零和 $V(x)$ 不显含时间 t 。

第四步: 待定系数 a_{ij} 按第三步选取原则确定后, 用第二步的最简单线积分表达式确定 $V(x)$ 。注意, $V(x)$ 要不显含时间 t 。

第五步: 若所确定的 $V(x)$ 在一定条件下是正定的, 则按上述方法所确定的 $V(x)$ 就是该系统的一个李亚普诺夫函数, 且系统是稳定的。若 $\dot{V}(x)$ 是负定的, 则系统是渐近稳定的, 若当 $\|x\| \rightarrow \infty$, 有 $V(x) \rightarrow \infty$, 则系统在平衡点是大范围渐近稳定的。需要说明的是, 即使对同一系统, 当选择不同 a_{ij} 参数时, 所得到的李亚普诺夫函数 $V(x)$ 也不同, 因而渐近稳定区域的范围也不同。对于所得的稳定范围大的 $V(x)$, 能更好地接近原系统的稳定区域; 至于最大的稳定范围, 该方法不能给出明确的答案。

应该指出, 如果用上述方法求不出合适的 $V(x)$, 就是在遵循 a_{ij} 的选取原则的基础上, 修改 a_{ij} 也不能求出正定的 $V(x)$, 那也不意味着平衡状态是不稳定的, 只说明变量梯度法不是一般的方法。

9.9 例题讲解

本章涉及现代控制理论的基础部分: 基于状态空间的概念, 分析和设计控制系统的性能。这部分包含内容较多, 主要有以下几个方面:

(1) 能熟练建立状态空间数学模型, 以及熟悉与其它形式数学模型之间的相互转换关系。尤为注意状态变量的取舍。

(2) 能将一般形式的状态空间表达式, 通过非奇异线性变换得到规范型。

(3) 能熟练求取状态转移矩阵 $\phi(t-t_0)$, 掌握状态转移矩阵 ϕ 的基本性质。能正确确定系统的可控性和可观性。尤其要记住能控矩阵和能观矩阵。

(4) 能运用李雅普诺夫第二方法, 用试凑法、克拉索夫方法和变量梯度法确定非线性系统的稳定性。掌握线性系统一般判别方法。

例 9.1 电网络如图 9-9 所示。输入量为电流源, 并指定以电容 c_1 和 c_2 上的电压作为输出, 求此网络的状态空间表达式。

解 此网络没有纯电容回路,也没有纯电感割集;因有两个电容和两个电感,共四个独立储能元件,故有四个独立变量。因以电容 c_1 和 c_2 上的电压 u_{c1} 和 u_{c2} 为输出,则可令其为状态变量,以及同时令 i_1 和 i_2 为状态变量。注意这四个状态变量是线性无关的。

令 $x_1 = u_{c1}$, $x_2 = u_{c2}$, $x_3 = i_1$, $x_4 = i_2$
则有

$$\begin{cases} i + i_3 + x_3 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \\ c_1 \dot{x}_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ c_2 \dot{x}_2 + x_4 - i_4 = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} -L_1 \dot{x}_3 + x_1 + R_1 i_3 = 0 \\ -x_1 + L_2 \dot{x}_4 + R_2 i_4 = 0 \\ L_2 \dot{x}_4 - L_1 \dot{x}_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

从以上 6 个式子中消去非独立变量 i_3 和 i_4 得:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{c_1}(x_3 + x_4)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{c_2(R_1 + R_2)}(x_2 - x_3 + R_2 x_4 - R_1 i)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_1}x_1 - \frac{R_1}{L_1(R_1 + R_2)}(x_2 + R_2 x_3 + R_2 x_4 + R_2 i)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{L_2}x_1 + \frac{R_2}{L_2(R_1 + R_2)}(x_2 - R_1 x_3 - R_1 x_4 - R_1 i)$$

则状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ 0 & -\frac{1}{c_2(R_1 + R_2)} & \frac{-1}{c_2(R_1 + R_2)} & -\frac{R_2}{c_2(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1(R_1 + R_2)} & \frac{-R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} \\ \frac{1}{L_2} & \frac{R_2}{L_2(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L_2(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L_2(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_1}{c_2(R_1 + R_2)} \\ -\frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)} \\ -\frac{R_1 R_2}{L_2(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} i$$

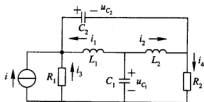


图 9-9

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

例 9.2 图 9-10 所示机械运动模型中, M_1 、 M_2 为质量块(同时也为块的质量), k_1 、 k_2 为弹簧(也为弹性系数), B_1 、 B_2 是阻尼器。列写出在外力 f 作用下, 以质量块 M_1 和 M_2 的位移 y_1 和 y_2 为输出的状态空间表达式。

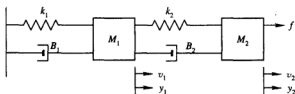


图 9-10

解 弹簧 k_1 、 k_2 和质量块 M_1 、 M_2 是储能元件, 即有四个独立变量(四个独立储能元件), 故可选弹簧的伸长度 y_1 、 y_2 , 质量块 M_1 、 M_2 的速度 v_1 、 v_2 作为状态变量。

令

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = v_1 = \dot{y}_1, x_4 = v_2 = \dot{y}_2$$

对于 M_1 有:

$$M_1 \ddot{y}_1 = k_2(y_2 - y_1) + B_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1 y_1 - B_1 \dot{y}_1$$

对于 M_2 有:

$$M_2 \ddot{y}_2 = f - k_2(y_2 - y_1) - B_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

则有:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}(k_1 + k_2)x_1 + \frac{k_2}{M_1}x_2 - \frac{1}{M_1}(B_1 + B_2)x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k_2}{M_2}x_1 - \frac{k_2}{M_2}x_2 + \frac{B_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{1}{M_2}f \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

例 9.3 设系统微分方程为:

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 14\dot{y} + 8y = \ddot{u} + 8\dot{u} + 15u$$

并设系统的初始条件为零, 试建立系统的状态空间表达式, 并画出状态图。

解 对于现代控制理论部分, 首先要解决的问题是如何从其它已知的数学模型, 获得系统的状态空间表达式。其实现方法很多, 要根据具体的要求来选择。在画状态变量图时, 要根据具体所建立的状态空间表达式来画; 状态变量图中仅有比例环节、比较环节和积分环节, 而积分环节的输出就是状态变量。显然, 对于同一系统, 由于状态变量的选取不同, 所得的状态空间表达式也不一样, 其状态图也应不同。

方法一: 时域实现方法。

由于系统微分方程右边包含有输入导数，因而令

$$x_1 = y - \beta_0 u, x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u, x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u, x_4 = \dot{x}_3 - \beta_3 u$$

其中 x_1, x_2, x_3 为状态变量, x_4 为中间变量, 则有:

$$\begin{aligned} & [x_4 + \beta_3 \ddot{u} + \beta_1 \ddot{u} + \beta_2 \dot{u} + \beta_3 u] + 7[x_3 + \beta_3 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_2 u] \\ & + 14[x_2 + \beta_3 \dot{u} + \beta_1 u] + 8[x_1 + \beta_0 u] \\ & = \ddot{u} + 8\dot{u} + 15u \end{aligned}$$

令左右系数相等, 得:

$$\begin{cases} x_4 = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 \\ \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 1 - 7 \cdot \beta_0 = 1 \\ \beta_2 = 8 - 7 \times \beta_1 - 14 \times \beta_0 = 1 \\ \beta_3 = 15 - 7 \times \beta_2 - 14 \times \beta_1 - 8 \times \beta_0 = -6 \end{cases}$$

则有:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_4 + \beta_3 u = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 - 6u \\ y = x_1 + \beta_0 u = x_1 \end{cases}$$

矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{X}$$

状态变量图如图 9-11。

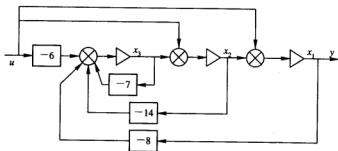


图 9-11

方法二: 由传递函数建立状态空间表达式。

系统传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

令 $G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Z(s)}$, 式中:

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}, \quad \frac{Y(s)}{Z(s)} = s^2 + 8s + 15$$

得

$$\ddot{z} + 7\dot{z} + 14z = u, \quad y = \ddot{z} + 8\dot{z} + 15z$$

令 $x_1 = z$, $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{z}$, $\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{z}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = \ddot{z} &= -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = -4x_3 + u = -2x_2 + x_3 + u, \\ y &= 15x_1 + 8x_2 + x_3 \end{aligned}$$

即得

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [15 \quad 8 \quad 1] \mathbf{X}$$

状态变量图如图 9-12。

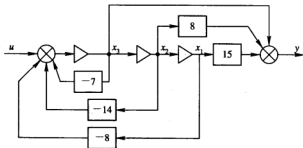


图 9-12

讨论：方法二与方法一由于所选状态变量不同，所得的状态空间表达式也不完全相同，但其 A 阵是相同的。 B 、 C 阵不同。方法一中 C 阵一定为 $(1 \ 0 \ 0)$ 形式，方法二中 B 阵一定是 $(0 \ 0 \ 1)^T$ 形式。另外对于方法二，也可直接利用梅逊公式来解释：

$$G(s) = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{s^{-1} + 8s^{-2} + 15s^{-3}}{1 + 7s^{-1} + 14s^{-2} + 8s^{-3}}$$

上式分母可理解为系统有三个相互接触的回环，而分子为有三个前向通路，并且每个前向通路与回环都接触，所得的状态变量图即为图 9-12。

方法三：串联实现。

将传递函数写成如下形式：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+4)} \\ &= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{s+5}{s+4} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \\ &= \frac{Y(s)}{U_1(s)} \cdot \frac{U_1(s)}{U_2(s)} \cdot \frac{U_2(s)}{U(s)} \end{aligned}$$

其中：

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} = \frac{x_1(s)}{U(s)}$$

$$\text{得} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$G_2(s) = \frac{U_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+3}{s+2} = 1 + \frac{1}{s+2} = 1 + \frac{x_2(s)}{U_2(s)}$$

$$\text{得} \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2 \\ u_1 = u_2 + x_2 \end{cases}$$

$$G_3(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{s+5}{s+4} = 1 + \frac{1}{s+4} = 1 + \frac{x_3(s)}{U(s)}$$

$$\text{得} \begin{cases} \dot{x}_3 = -4x_3 + u \\ u_2 = u + x_3 \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 = -x_1 + u_2 + x_2 = -x_1 + x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u_2 = -2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -4x_3 + u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{X}$$

状态变量图如图 9-13。

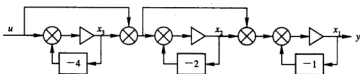


图 9-13

讨论: 若令

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} = \frac{X_1(s)}{U(s)},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = \frac{s+3}{s+2} = 1 + \frac{X_2(s)}{Y_1(s)},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + y_1 = -2x_2 + x_1 \\ y_2 = y_1 + x_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{Y_2(s)} = \frac{s+5}{s+4} = 1 + \frac{1}{s+4} = 1 + \frac{X_3(s)}{Y_2(s)},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -4x_3 + y_2 = x_1 + x_2 - 4x_3 \\ y = y_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

则

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{X}$$

也可令

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

由

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+3}{s+2}, \quad X_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+3}{s+2} \cdot U(s) = \frac{s+3}{s+2} X_1(s)$$

得

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + \dot{x}_1 + 3x_1 = 2x_1 - 2x_2 + u$$

由 $G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{X_3(s)}{U(s)}, X_3(s) = \frac{s+5}{s+4}X_2(s)$

得 $\dot{x}_3 = -4x_3 + \dot{x}_2 + 5x_2 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + u, y = x_3$

则
$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{X}$$

可见串联实现有多种表现形式, 所得的状态变量图也不同。

方法四: 并联实现。

$$G(s) = \frac{8/3}{s+1} - \frac{3/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+4} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

令

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}, \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}, \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+4}$$

有 $\dot{x}_1 = -x_1 + u, \dot{x}_2 = -2x_2 + u, \dot{x}_3 = -4x_3 + u, y = \frac{8}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3$

故有
$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

状态变量图如图 9-14。

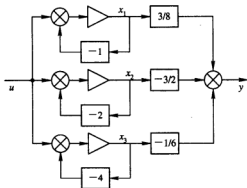


图 9-14

例 9.4 已知系统传递函数为 $G(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+6}$, 试写出它的对角线规范型。

解 一般要写其对角线规范型, 可采用并联实现方法, 但要注意的是, 当 $m=n$ (分母次数等于分子次数) 时, D 矩阵不为零。

$$G(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+6} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} + K_3$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -2} G(s)(s+2) = 1, K_2 = \lim_{s \rightarrow -3} G(s)(s+3) = -4$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 1 \quad (\text{注: } m < n \text{ 时, } K_3 \text{ 为零})$$

则

$$G(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{-4}{s+3} + 1$$

令

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}, \quad \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

有

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u \quad \dot{x}_2 = -3x_2 + u \quad y = x_1 - 4x_2 + u$$

则

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -4] \mathbf{X} + [1] u$$

例 9.5 已知双输入—双输出的系统, 其微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + a_2 y_2 = b_1 \dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + a_3 y_2 + a_4 y_1 = b_4 u_2 \end{cases}$$

试写出其状态空间表达式。

解 对于多变量系统, 从微分方程建立其状态空间表达式, 同单变量系统类似。也就是说, 微分方程的右侧包含有输入导数, 则状态变量常取为 $x_i = \dot{x}_{i-1} - \beta_{i-1} u$ 。对于本题, y_1 的最高次导数为二阶, y_2 的最高次导数为一阶, 因而, 状态变量个数为 3。 y_1 有二阶导数, 第一个微分方程右侧有输入的导数, 因而, 可令 $x_1 = y_1 - \beta_0 u_1$, $x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u_1$; y_2 有一阶导数, 且第二个方程的右侧无输入的导数项, 可令 $x_3 = y_2$ 。

方法一: 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \beta_0 u_1 \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u_1 = \dot{y}_1 - \beta_0 \dot{u}_1 - \beta_1 u_1 \\ x_3 = y_2 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (\dot{x}_2 + \beta_0 \ddot{u}_1 + \beta_1 \dot{u}_1) + a_1(x_2 + \beta_0 \dot{u}_1 + \beta_1 u_1) + a_2 x_3 = b_1 \dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{x}_3 + a_3 x_2 + a_4(x_1 + \beta_0 u_1) = b_4 u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 + \beta_0 \ddot{u}_1 + (\beta_1 + a_1 \beta_0) \dot{u}_1 + (a_1 \beta_1) u_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = b_1 \dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{x}_3 + a_3 x_2 + a_4 x_1 + a_4 \beta_0 u_1 = b_4 u_2 \end{cases}$$

令 $\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 + a_1 \beta_0 = b_1 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = b_1 \end{cases}$, 则上式为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_1 b_1 u_1 = b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{x}_3 + a_3 x_2 + a_4 x_1 = b_4 u_2 \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u_1 = x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_3 + (b_2 - a_1 b_1) u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = -a_4 x_1 - a_3 x_2 + b_4 u_2 \end{cases}$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3$$

则

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 - a_1 b_1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

方法二：对微分方程进行拉氏变换：

$$\begin{cases} s^2 Y_1(s) + a_1 s Y_1(s) + a_2 Y_2(s) = b_1 s U_1(s) + b_2 U_1(s) + b_3 U_2(s) \\ s Y_2(s) + a_3 s Y_2(s) + a_4 Y_1(s) = b_4 U_2(s) \end{cases}$$

对上式化简得：

$$\begin{cases} Y_1(s) = b_1 s^{-2} U_1(s) + b_1 s^{-1} U_1(s) + b_3 s^{-2} U_2(s) - a_1 s^{-1} Y_1(s) - a_2 s^{-2} Y_2(s) \\ Y_2(s) = b_4 s^{-1} U_2(s) - a_3 s^{-1} Y_2(s) - a_4 s^{-1} Y_1(s) \end{cases}$$

由上式求得系统的结构图如图 9-15。取每个积分的输出为一个状态变量，见图 9-15，则另一种实现为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_3 + b_2 u_1 + b_3 u_2 & y_1 = x_1, y_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = -a_4 x_1 - a_3 x_3 + b_4 u_2 \end{cases}$$

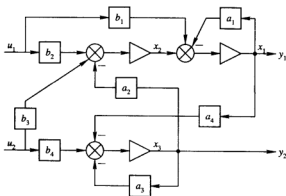


图 9-15

则状态空间表达式为：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 \\ -a_4 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

讨论：方法一和方法二所得结论都描述同一系统。对于某一确定的系统，由于状态变量的选择是非惟一的，因而状态空间表达式也是非惟一的。本题中两种方法的结论，可以通过非奇异变换相互转换。方法一和方法二之间的变换矩阵为：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

有

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 \\ -a_4 & 0 & -a_3 \end{bmatrix},$$

$$T \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 - a_1 b_1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 9.6 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, 请确定变换矩阵, 将 A 化为模态标准形。

解 $|\lambda I - A| = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$

则

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm j$$

方法一: 由于 A 阵为友矩阵, 因而可从有关公式直接求变换矩阵, 又因本题中有一对共轭复根, 因而变换矩阵如下:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & R_s(\lambda_2) & I_m(\lambda_2) \\ \lambda_1^2 & R_s(\lambda_2^2) & I_m(\lambda_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

方法二: 将 A 阵作为一般矩阵, 且将一对共轭复根也看成两个单根处理。先求特征向量。

$$\text{由 } AP_1 = \lambda_1 P_1 \text{ 得 } \begin{cases} p_{21} = -p_{11} \\ p_{31} = -p_{21} \\ -2p_{11} - 4p_{21} - 3p_{31} = -p_{31} \end{cases}, \text{ 取 } p_{11} = 1, \text{ 得 } P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{由 } AP_2 = \lambda_2 P_2 \text{ 得 } \begin{cases} p_{22} = (-1+j)p_{12} \\ p_{32} = (-1+j)p_{22} \\ -2p_{12} - 4p_{22} - 3p_{32} = (-1+j)p_{32} \end{cases}, \text{ 取 } p_{12} = 1, \text{ 得 } P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{bmatrix}.$$

同理得

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \\ 2j \end{bmatrix}$$

又

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+j & -1-j \\ 1 & -2j & 2j \end{bmatrix} \quad T_1 = \begin{bmatrix} -4j & -4j & -2j \\ -1+j & 2j-1 & j \\ 1+j & 1+2j & j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}j$$

则

$$T_1 A T_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix}$$

由于上对角线矩阵元素含有复数, 需进行变换。

令

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix}$$

则

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{1}{2}j & -\frac{1}{2}j \end{bmatrix}$$

有

$$T_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix} T_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则总的变换矩阵为:

$$T^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+j & -1-j \\ 1 & -2j & 2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & 1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

方法三: 特征向量 P_1 同前,

$$P_2 \text{ 取方法二的特征向量 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{bmatrix} \text{ 的实部, 即 } P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 \text{ 取方法二的特征向量 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{bmatrix} \text{ 的虚部, 即 } P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

则

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

例 9.7 已知系统的状态矩阵 A 如下, 试求变换矩阵并将其化为规范型。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解 两个矩阵的特征值都存在重根, 但第 2 个矩阵不能化为约旦型, 详见以下解题过程。

$$(1) |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 & 5 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

有一个单根 $\lambda_1=2$, 一对二重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 。

对于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量有: $(\lambda_1 I - A)P_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} P_1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{初等变换} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_1 = 0 \end{matrix}$$

此线性方程组的系数矩阵的秩为 2, 基本解系为 $3-2=1$, 可取 $P_1 = (2 \quad -1 \quad -2)^T$

对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量有 $(\lambda_2 I - A)P_2=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} P_2 = 0 \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_2 = 0$$

此线性方程组的系数矩阵的秩为 2, 其基本解系为 $3-2=1$, 可以取

$$P_2 = \left(1 \quad -\frac{3}{7} \quad -\frac{5}{7} \right)^T$$

对应于重特征值的特征向量数少于重特征值数, 因此, 必须寻求另一个辅助特征向量 (广义特征向量) 如下:

$$(\lambda_3 I - A)P_3 = -P_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} P_3 = - \begin{bmatrix} 1 \\ -3/7 \\ -5/7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_3 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 4/7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此线性方程组的系数矩阵的秩同前一样也为 2, 其基本解系为 $3-2=1$, 可以取:

$$P_3 = \left(1 \quad -\frac{22}{49} \quad -\frac{46}{49} \right)^T$$

$$\text{则 } T^{-1} = (P_1 \ P_2 \ P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} \\ -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} \end{pmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -4 & -11 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 7 & 28 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } A' = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

有一个单特征值 $\lambda_1=2$ 和一对二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$. 特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量 P_1 有:

$$(\lambda_1 I - A)P_1 = 0 \quad \text{得} \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_1 = 0$$

此线性方程组的系数矩阵秩为 2, 其基本解系为 $3-2=1$, 可取 $P_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$.

对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量 P_2 有: $(\lambda_2 I - A)P_2=0$, 得

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 = 0$$

此线性方程组的系数矩阵的秩为 1, 因而其基本解系为 $3-1=2$, 故可取:

$$P_2 = (-4 \ 1 \ 0)^T \text{ 和 } P_3 = (-5 \ 0 \ 1)^T$$

注意: 由于对应于重根特征值的线性无关的特征向量数等于重特征值数, 所以仍然有三个独立的特征向量。此时不能按前面例子那样, 由 P_2 求 P_3 , 即 $(\lambda_3 I - A)P_3 = -P_2$, 有

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_3 = -\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以有:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (P_1 \ P_2 \ P_3), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A' = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

讨论: 从本例可知, (1) 和 (2) 的特征值情况完全相同, 但所对应 A 变换的规范型并不一样。问题 (2) 的规范型只能为对角线型, 问题 (1) 只能为约旦型。这是由于 (2) 不存在广义特征向量, 而 (1) 有广义特征向量。

例 9.8 线性定常系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{bmatrix} X$, 试求系统的状态转移矩阵。

解 求状态转移矩阵主要有四种方法, 按定义求解不便于理论计算和分析, 因而主要用后三种方法, 而频域法是解题中常用的方法。

方法一: 频域法 $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - \delta & -\omega \\ \omega & s - \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s - \delta)^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s - \delta & \omega \\ -\omega & s - \delta \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} L^{-1}\left[\frac{s - \delta}{(s - \delta)^2 + \omega^2}\right] & L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s - \delta)^2 + \omega^2}\right] \\ L^{-1}\left[\frac{-\omega}{(s - \delta)^2 + \omega^2}\right] & L^{-1}\left[\frac{s - \delta}{(s - \delta)^2 + \omega^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\delta t} \sin \omega t & e^{\delta t} \cos \omega t \\ -e^{\delta t} \cos \omega t & e^{\delta t} \sin \omega t \end{bmatrix} = e^{\delta t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

方法二: 有限和方法

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A$$

$|\lambda I - A| = 0$ 的特征根为: $\lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$ 。则有

$$e^{a_1 t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 \quad e^{a_2 t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_2$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{a_1 t} \\ e^{a_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta + j\omega \\ 1 & \delta - j\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{(\delta + j\omega)t} \\ e^{(\delta - j\omega)t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2j\omega} \begin{bmatrix} \delta - j\omega & -(\delta + j\omega) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(\delta + j\omega)t} \\ e^{(\delta - j\omega)t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2j\omega} \begin{bmatrix} \delta - j\omega & -(\delta + j\omega) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(\delta + j\omega)t} \\ e^{(\delta - j\omega)t} \end{bmatrix}$$

设 $\delta + j\omega = Be^{j\varphi}$, 则 $\delta - j\omega = Be^{-j\varphi}$

$$\begin{aligned}\text{上式} &= -\frac{1}{2j\omega} \left[\begin{matrix} B(e^{(\delta+j\omega)t-j\varphi} - e^{(\delta-j\omega)t+j\varphi}) \\ -e^{(\delta+j\omega)t} + e^{(\delta-j\omega)t} \end{matrix} \right] = -\frac{1}{2j\omega} \left[\begin{matrix} Be^{j\varphi}(e^{j(\omega t-\varphi)} - e^{-j(\omega t-\varphi)}) \\ -e^{j\omega t}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{matrix} \right] \\ &= -\frac{1}{2j\omega} \left[\begin{matrix} Be^{j\varphi} \cdot 2j\sin(\omega t - \varphi) \\ -e^{j\varphi} \cdot 2j\sin\omega t \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} Be^{j\varphi} \sin(\omega t - \varphi) \\ -e^{j\varphi} \sin\omega t \end{matrix} \right] \cdot \frac{-1}{\omega} \\ &= \frac{-e^{j\varphi}}{\omega} \left[\begin{matrix} \delta \sin\omega t - \omega \cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{matrix} \right]\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t)A \\ &= -\frac{e^{j\varphi}}{\omega} (\delta \sin\omega t - \omega \cos\omega t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{j\varphi}}{\omega} \sin\omega t \begin{bmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \cdot e^{j\varphi}\end{aligned}$$

方法三: 化为标准形(对角线), 特征根为 $\lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$, 特征向量为 P_1, P_2 。

有 $\begin{cases} (\delta + j\omega)P_1 = AP_1 \\ (\delta - j\omega)P_2 = AP_2 \end{cases}$, 取

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ +j \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned}A' &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & +j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & \omega \\ -\omega & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ +j & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta + j\omega & 0 \\ 0 & \delta - j\omega \end{bmatrix} \\ e^{A't} &= e^{P^{-1}A't} = P^{-1}e^{A't}P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(\delta+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\delta-j\omega)t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & +j \end{bmatrix} \\ &= e^{j\varphi} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

例 9.9 系统的结构图如图 9-16 所示, 试求系统的离散化的状态方程和输出方程。采样周期 $T=1$ 。

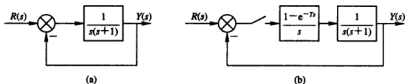


图 9-16

解 图(a)为连续系统, 图(b)为离散系统, 虽然它们的被控对象相同, 但离散化后系统状态方程是不一样的。通过该例清楚表明离散前和离散后系统的描述区别。被控对象 $G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 为连续系统, 其信号流图为图 9-17。则

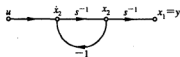


图 9-17

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] \mathbf{X}$$

(1) 图 9-16(a)为连续系统, 有 $u = r - y$, 则系统的状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y = [1 \quad 0] \mathbf{X}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}], \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{bmatrix}$$

$T=1$ 时,

$$e^{\mathbf{A}T} = e^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.54 \\ -0.54 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(T) &= \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right] \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \right] + 1 \\ e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.54 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则离散化状态方程与输出方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.54 \\ -0.54 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.54 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

(2) 对于图 9-16(b), $u(t) \neq r(t) - y(t)$, 有

$$U(s) = [R(s) - Y(s)] \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

根据零阶保持器的特性, 在采样时刻有

$$U(k) = r(k) - y(k) = r(k) - x_1(k)$$

首先对被控对象进行离散化:

此时

$$e^{As} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}], (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

得

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \left[\int_0^T e^{As} ds \right] B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 - e^{-s} \\ e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix}$$

则被控对象离散化的描述为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix} u(k)$$

因为

$$u(k) = r(k) - x_1(k)$$

所以系统离散化状态方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.632 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.368 \\ 0.632 \end{bmatrix} r(k)$$

输出方程为:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

例 9.10 线性离散系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

设系统初始状态 $X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 系统输入是在 $kT=0$ 时刻的单位脉冲 $\delta(t)$ 。

试求离散系统状态方程的解 $X(k)$ 及系统输出 $y(k)$ 。

解

$$\Phi(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}Z]$$

式中

$$(zI - G)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1/4} & 0 \\ \frac{z}{z-1/4} - \frac{z}{z-1/8} & \frac{1}{z-1/8} \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z] \\ &= z^{-1} \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1/4} & 0 \\ \frac{z}{z-1/4} - \frac{z}{z-1/8} & \frac{z}{z-1/8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{-k} & 0 \\ 4^{-k} - 8^{-k} & 8^{-k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

离散系统的状态方程的解为

$$X(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z]X(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)]$$

依题意知 $U(z)=1$ 。

$$Z^{-1}[(zI - G)^{-1}GU(z)] = Z^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1/4} \\ \frac{1}{z-1/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{-(k-1)} \\ 4^{-(k-1)} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}X(k) &= \begin{bmatrix} 4^{-k} & 0 \\ 4^{-k} - 8^{-k} & 8^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4^{-(k-1)} \\ 4^{-(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{-k} + 4^{-(k-1)} \\ 4^{-k} - 8^{-k} + 4^{-(k-1)} \end{bmatrix} \\ y(k) &= (1/2 \quad 0)X(k) = \frac{1}{2}[4^{-k} + 4^{-(k-1)}]\end{aligned}$$

讨论：离散系统解为：

$$X(k) = \Phi(k)X(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)HU(i) = \Phi(k)x(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)]$$

其中 $\Phi(k)$ 为离散系统的状态转移矩阵， $\Phi(k) = G^k$ ， G 为状态矩阵。 $\Phi(k)$ 的求取常用 $\Phi(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z]$ ，当然也可参照线性连续系统的一些方法。如将 G 通过变换矩阵 P 得对角线标准形 G' 。

$$G' = PGP^{-1}, (G')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

则 $\Phi(k) = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P$ ，其中 λ_i 为 n 个互不相等的特征根。

例 9.11 给定矩阵微分方程和初始条件为：

$$\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A, P(t)|_{t=0} = P_0$$

$P(t)$ 为 $n \times n$ 维时变矩阵， A 为 $n \times n$ 维常系统矩阵， A^T 为 A 的转置。试确定矩阵 $P(t)$ 的表达式。

解 本题要求熟悉状态转移矩阵的有关性质，尤其是状态转移矩阵必须具有两点基本的定义性质即 $\Phi(0) = I$ ， $\Phi(t) = A\Phi(t)$ 。将 $\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A$ 的微分方程对照 $\dot{X}(t) = AX(t)$ 微分方程，显然有 $P(t) = \Phi(t)P_0 = e^{At}P_0$ ，但本题已知不是如此形式，可仿照该方法处理。详见下面：

将原微分方程分解为两个部分, 即① $\dot{P}(t) = P(t)A$ 和② $\dot{P}(t) = A^T P(t)$ 。

将 $\dot{P}(t) = P(t)A$ 转置得 $[P^T(t)]' = A^T P^T(t)$, 由此可得 $P^T(t) = e^{A^T t} P_0^T$, 该式即为矩阵微分方程①的解。则有

$$P(t) = P_0 (e^{A^T t})^T = P_0 e^{At} = P_0 \phi(t)$$

对于 $\dot{P}(t) = A^T P(t)$, 可得

$$P(t) = e^{A^T t} P_0 = (e^{At})^T P_0 = \phi^T(t) P_0$$

该式为矩阵微分方程②的解。

综合上述两个解, 可取 $P(t) = \phi^T(t) P_0 \cdot \phi(t)$, 对该式求导有:

$$\dot{P} = (\phi^T)' P_0 \phi + \phi^T P_0 \dot{\phi} = A^T \phi^T P_0 \phi + \phi^T P_0 \phi A = A^T P + P A \quad (\text{注 } \dot{\phi} = A\phi = \phi A)$$

另外可从下面方法求解:

对 $P = A^T P + P A$ 式左乘 $e^{-A^T t}$ 和右乘 e^{-At} 得:

$$e^{-A^T t} \dot{P} e^{-At} - e^{-A^T t} A^T P e^{-At} - e^{-A^T t} P A e^{-At} = (e^{-A^T t} P e^{-At})' = 0$$

即

$$e^{-A^T t} P e^{-At} \Big|_0^t = 0$$

则

$$P(t) = e^{A^T t} P_0 e^{At} = \phi^T(t) P_0 \phi(t)$$

例 9.12 设系统状态方程为 $\dot{X} = AX(t)$, 试求系统矩阵 A 及系统状态转移矩阵。

已知 当 $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 时, $X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$;

当 $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 时, $X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ 。

解 该题是利用状态转移矩阵的性质, 求状态转移矩阵。要记住两点定义式, 即 $\phi(0) = I$, $\dot{\phi}(t) = A\phi(t)$ 。也需记住自由运动 $\dot{X} = AX$ 的解为 $X = \phi X(0)$ 。

由已知条件可得:

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ +e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \\ A = \dot{\phi}(t) \Big|_{t=0} &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ +e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ -2e^{-2t} + e^{-t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

或由

$$(sI - A)^{-1} = L[\phi(t)] = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

得

$$A = sI - (s+1)(s+2) \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

例 9.13 已知时变系统的状态转移矩阵 $\phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}$, 试求系数矩阵

$A(t)$ 和 $\phi(t, 1)$ 。

解 对于时变系统的状态转移矩阵, 也有两点定义式, 即

$$\dot{\phi}(t, t) = I, \phi(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$$

需注意的是, 此时

$$A(t) \neq \dot{\phi}(t, t_0) |_{t=t_0}$$

因 $t=t_0$ 时, 有

$$\dot{\phi}(t, t_0) |_{t=t_0} = [A(t)\phi(t, t_0)]_{t=t_0} = A(t_0)$$

因为

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$$

则

$$\begin{aligned} A(t) &= \dot{\phi}(t, t_0)\phi^{-1}(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{2t} \cos t - e^{3t} \sin t & -2e^{2t} \sin t - e^{2t} \cos t \\ e^t \sin t + e^t \cos t & e^t \cos t - e^t \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^{2t} \sin t \\ -e^t \sin t & e^{2t} \cos t \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{e^{3t}} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -e^{t-t} \\ e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

又因

$$\phi(t, 1) \cdot \phi(1, 0) = \phi(t, 0)$$

所以

$$\begin{aligned} \phi(t, 1) &= \phi(t, 0)\phi^{-1}(1, 0) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 1 & e^2 \sin 1 \\ -\sin 1 & e^2 \cos 1 \end{bmatrix} \frac{1}{e^3} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2(t-1)} \cos(t-1) & -e^{2(t-1)} \sin(t-1) \\ e^{t-2} \sin(t-1) & e^{t-1} \cos(t-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

讨论: 对线性时变系统的状态转移矩阵的求取, 比定常系统要困难。即使满足交换条件(即 $A(t_1)A(t_2)=A(t_2)A(t_1)$), 能将时变系统的状态转移矩阵写成指数矩阵的形式, 一般也不能表达成封闭的形式, 也不能用有限多项式来表示。因此, 时变系统的状态转移矩阵往往只能近似计算。但有时 $\phi(t, t_0)$ 也可用自变量的解析方法直接求得。如本例, 由 $\dot{X}=A(t)X$ 得:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - e^{-t}x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = e^{-t}x_1 + x_2 \quad (2)$$

对②式求得

$$\ddot{x}_2 = e^{-t}x_1 + e^{-t}\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad (3)$$

将 $\dot{x}_1 = 2x_1 - e^{-t}x_2$ 代入上式得:

$$\ddot{x}_2 = e^{-t}x_1 - x_2 + \dot{x}_2$$

由 $\ddot{x}_2 = e^{-t}x_1 - x_2 + \dot{x}_2$ 和 $\dot{x}_2 = e^{-t}x_1 + x_2$ 式得:

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_2 + 2x_2 = 0$$

其特征值 $\lambda_{1,2} = 1 \pm j1$, 则有

$$x_2(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t$$

由 $x_2(t)|_{t=0} = x_2(0)$, 得

$$C_2 = x_2(0)$$

将 $x_2 = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t$ 代入 $\dot{x}_2 = e^{-t} x_1 + x_2$ 得:

$$x_1(t) = C_1 e^{2t} \cos t - C_2 e^{2t} \sin t$$

由 $x_1(0)|_{t=0} = x_1(0)$ 得 $C_1 = x_1(0)$, 则

$$x_1(t) = x_1(0) e^{2t} \cos t - x_2(0) e^{2t} \sin t$$

$$x_2(t) = x_1(0) e^t \sin t - x_2(0) e^t \cos t$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}$$

例 9.14 用李雅普诺夫方法判断下述非线性系统在原点平衡状态的稳定性。

- $$\begin{aligned} (1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(a_1 x_1 + a_2 x_1^2 x_2) \end{cases} \quad a_1 > 0, a_2 > 0 & (2) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta(1+x_2)^2 x_2 - x_1 \end{cases} \quad \beta > 0 \\ (3) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - x_2 \end{cases} \quad \frac{g(x_1)}{x_1} > 0, \forall x_1 \neq 0 & (4) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 \end{cases} \\ (5) \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases} & (6) \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - x^3 \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \end{aligned}$$

解 对于用李雅普诺夫方法, 判断非线性系统的稳定性, 关键在于寻找一个满足判据条件的李雅普诺夫函数 $V(x)$, 但是没有构造 $V(x)$ 的一般方法。导致其应用起来并不容易。一般情况首先将 $V(x)$ 构造成二次函数即 $V(x) = x^T P x$, 进行试凑, 这需要较多的数学技巧; 其次用克拉索法进行试探, 再其次用变量梯度法进行试探。尤为注意的是李雅普诺夫第二方法仅提供了稳定判据的充分条件, 而不是必要条件; 另外, $V(x)$ 的选取也不是惟一的。

(1) 因 $\frac{1}{2} x_1^2$ 的导数为 $x_1 \dot{x}_1 = x_1 x_2$, $\frac{1}{2} x_2^2$ 的导数为 $x_2 \dot{x}_2 = -(a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1^2 x_2^2)$, $x_1 x_2$ 的导数为 $\dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_2^2 - (a_1 x_1^2 + a_2 x_1^3 x_2)$; 由前二导数式可知, 将第一式乘以大于零的 a_1 , 与第二式相加得 $-a_2 x_1^2 x_2^2$, 其符号可确定。因此选择:

$$V(x) = \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, V(x) \text{ 是正定的}$$

$$\dot{V}(x) = a_1 x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = a_1 x_1 x_2 - (a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1^2 x_2^2) = -a_2 x_1^2 x_2^2$$

当 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 0$ 时, $\dot{V}(x) = 0$, 又因为 $a_2 > 0$, 所以 $V(x)$ 是负半定的。

又因为 $x_1 = 0$ 时由状态方程得 $\dot{x}_2 = 0$ 或 $\dot{x}_2 = 0$, 有 $x_1 = 0$ 。

这表明 $V(x)$ 只可能在原点处恒等于零。

所以系统是渐近稳定的;

又因为 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $V(x) \rightarrow \infty$, 所以系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

(2) 选择 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, $V(x)$ 是正定的。

$$\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -2\beta(1+x_2)^2 x_2^2$$

当 $x_2 = 0$ 或 $x_2 = -1$ 时, $\dot{V}(x) = 0$, 所以 $\dot{V}(x)$ 是负半定的。

当 $x_2 \equiv 0$ 时, 有 $\dot{x}_2 = 0$, 由状态方程得 $x_1 = 0$, 此时只有在 $x_1 = x_2 = 0$ 时 $V(x) = 0$;

当 $x_2 \equiv -1$ 时, 有 $\dot{x}_2 \equiv 0$, 由状态方程得 $x_1 \equiv 0$ 和 $\dot{x}_1 \equiv -1$, 这个结果是矛盾的, 所以系统不会出现这种情况。

综上所述: 系统在非零状态上 $\dot{V}(x)$ 不恒为零, 又因为 $\|x\| \rightarrow \infty$, $V(x) \rightarrow \infty$, 所以 $x_e = 0$ 是系统的大范围渐近稳定的平衡状态。

(3) 因 $\frac{1}{2}x_1^2$ 的导数为 $x_1\dot{x}_1 = x_1x_2$, $\frac{1}{2}x_2^2$ 的导数为 $x_2\dot{x}_2 = -g(x_1)x_2 - x_2^2$, x_1x_2 的导数为 $x_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1x_2 = -g(x_1)x_1 - x_1x_2 + x_2^2$; 从上三个导数式可知, 很难组合成一个负定或正定的函数。

对于该种情况, 即 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - x_2 \end{cases}$ 的形式, 可选如下 $V(x)$ 形式:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(x_1) dx_1$$

因为 $g(x_1)/x_1 > 0$, 所以 $\int_0^{x_1} g(x_1) dx_1 > 0$, 则 $V(x)$ 是正定的。

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + g(x_1)\dot{x}_1 = x_2[-g(x_1) - x_2] + g(x_1)x_2 = -x_2^2$$

当 $x_2 \equiv 0$ 时有 $\dot{V}(x) = 0$, 所以 $\dot{V}(x)$ 是负半定的。

当 $x_2 \equiv 0$ 时有 $\dot{x}_2 \equiv 0$, 从状态方程得 $g(x_1) \equiv 0$, $\dot{x}_1 = 0$; 因为已知在 $x_1 \neq 0$ 时有 $g(x_1)/x_1 > 0$, 因此当 $x_2 \equiv 0$ 时, 有 $x_1 = 0$ 。

所以系统只有在 $x_1 = x_2 = 0$ 时, $V(x) = 0$, 即 $V(x)$ 不恒为零, 则 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 系统在平衡状态是大范围渐近稳定的。

(4) 因 $\frac{1}{2}x_1^2$ 的导数为 $x_1\dot{x}_1 = x_1x_2$, $\frac{1}{2}x_2^2$ 的导数为 $x_2\dot{x}_2 = -x_2^2 - x_1^3x_2$, 由上两导数式, 很难组合成一个符号确定的 $V(x)$ 。但若对 $\frac{1}{4}x_1^2$ 乘以 $x_1^2 > 0$ 后求导, 与 $\frac{1}{2}x_2^2$ 的导数叠加后为 $-x_2^2$, 其正定性可确定。故选择:

$$V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2, V(x) \text{ 为正定的}$$

$$\dot{V}(x) = x_1^3\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1^3x_2 - x_2^2 - x_1^3x_2 = -x_2^2$$

当 $x_2 \equiv 0$ 时, $\dot{V}(x) \equiv 0$, 则 $\dot{V}(x)$ 为负半定的。

又因为 $x_2 \equiv 0$ 时, $\dot{x}_2 \equiv 0$, 由状态方程知 $\dot{x}_1 = 0$, $x_1 = 0$

所以 $\dot{V}(x)$ 只在 $x_1 = x_2 = 0$ 时为零, 不恒为零。

因为 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $V(x) \rightarrow \infty$, 所以系统在平衡状态是大范围渐近稳定的。

(5) 该题直接用试凑法很难构造 $V(x)$, 可首先考虑克拉索夫法。

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -5 < 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 3x_2^2 < 0$$

因两个偏导数均为负值, 可以尝试克拉索夫法。

$$\text{雅可比矩阵} \quad F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

则 $F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$ 为负定的。(注: $F^T(x) + F(x)$ 的符号与 $F(x)$ 一致)

则当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x)f(x) \\ &= [-5x_1 + x_2 \quad x_1 - x_2 - x_2^3] \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \\ &= (-5x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

所以系统的平衡状态 $x_e=0$ 是大范围渐近稳定的。

(6) 通过试凑法, 取 $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} + \frac{9}{4}e^{-t}$, 显然 $V(x, y)$ 为正定的。

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} + (x\dot{x} + y\dot{y})e^{-t} - \frac{9}{4}e^{-t} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} + \left(2x^2 + xy - x^4 + xy - y^2 - \frac{9}{4}\right)e^{-t} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} + \left(-x^4 + 3x^2 - \frac{9}{4} - y^2 + 2xy - x^2\right)e^{-t} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} + \left[-\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - (y-x)^2\right]e^{-t} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)e^{-t} - \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 e^{-t} - (y-x)^2 e^{-t} \end{aligned}$$

从上式可知 $V(x, y)$ 为负定的, $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x, y) \rightarrow +\infty$, 则系统在 $x=y=0$ 处是渐近稳定的且为大范围渐近稳定。

例 9.15 试用李雅普诺夫第二方法确定下列线性系统的稳定性。

$$(1) \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X \quad (2) X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} X(k)$$

解 对于线性系统的稳定性判别, 李雅普诺夫第二方法有规范的方法去求 $V(X)$ 或 $V[X(k)]$ 。对于连续系统, 用式 $A^T P + PA = -Q$; 对于离散系统, 用式 $G^T PG - P = -Q$, 二式中 Q 为正定矩阵。一般选 $Q=I$, 由这二式可求出 P , 则李雅普诺夫函数为

$$V[X] = X^T P X \quad \text{或} \quad V[X(k)] = X^T(k) P X(k)$$

(1) 由于系统状态矩阵 A 为非奇异的, 故 $X_e=0$ 是该系统惟一的平衡状态。

设 $V(X) = X^T P X$, 则 $\dot{V}(X) = -X^T Q X$; 有 $A^T P + PA = -Q$, 取 $Q=I$, 有

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$p_1 = \frac{14}{8} > 0$, $p_2 = \det P = \frac{7}{64} > 0$, 故对称矩阵 P 是正定的

所以系统是渐进稳定的, 且 $V(X) = X^T P X = \frac{7}{4}x_1^2 + \frac{5}{4}x_1x_2 + \frac{3}{8}x_2^2$

讨论: 上述过程为一般方法。也可采用非线性系统中二次型的试凑法。取 $V(X) = x_1^2 + x_2^2$, 此时相当于 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则有

$$Q = -(A^T P + P A) = -(A^T + A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Q 为正定的; 所以系统是渐进稳定的, 且 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, 也是一个李雅普诺夫函数。

(2) 由于系统的状态矩阵 G 为非奇异的, 所以 $X_e = 0$ 是系统的惟一平衡状态。

令 $V[X(k)] = X^T(k) P X(k)$, 则

$$\Delta V[X(k)] = -X^T(k) Q X(k)$$

其中 $-Q = G^T P G - P$ 。令 $Q = I$, 由

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解得

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}, P \text{ 为正定的}$$

所以系统是大范围渐近稳定的。

讨论: 上述过程为一般方法。也可用试凑法, 即令

$$V[X(k)] = \frac{1}{2} x_1^2(k) + x_2^2(k)$$

则

$$\begin{aligned} \nabla V[X(k)] &= V[X(k+1)] - V[X(k)] \\ &= \frac{1}{2} x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - \frac{1}{2} x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= \frac{1}{2} x_2^2(k) + \frac{1}{4} x_1^2(k) - \frac{1}{2} x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= -\frac{1}{4} x_1^2(k) - \frac{1}{2} x_2^2(k) \end{aligned}$$

$\nabla V[X(k)]$ 为负定的; 此时 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

例 9.16 已知系统 $[A, b, C^T]$ 的动态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -1 \quad 1] X$$

试确定系统的能控性和能观性。

解 能控性、能观性判据较多, 常用的是根据能控矩阵 $Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 和能观矩阵 $Q_o = [C^T \quad C^T A \quad \cdots \quad C^T A^{n-1}]^T$ 是否满秩进行判断。另外要注意的是, 用传递函数矩阵法判别能控性和能观性时, 对单输入单输出系统是充要条件, 而对多输入多输出系统仅为必要条件。

方法一: 能控能观矩阵判据法。

系统的能控性矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{rank} Q_c = 2 < n = 3$$

所以系统是不完全能控的。

系统能观性矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rank} Q_c = 2 < n = 3$$

系统是不完全能观的。

方法二：标准型判据。首先将状态方程变换为标准型。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2$$

由 $(\lambda_1 I - A)P_1 = 0$, 得 $P_1 = (0 \quad 1 \quad 2)^T$;

由 $(\lambda_2 I - A)P_2 = 0$, 得 $P_2 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$;

由 $(\lambda_2 I - A)P_3 = -P_2$, 得 $P_3 = (1 \quad 0 \quad -3)^T$ 。

则

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B' = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad C' = CP^{-1} = (1 \quad 0 \quad -2)$$

由于 B' 第一行全为零, 则系统不完全能控。(因第三行不为零, 则约旦块所对应的状态变量为能控, 且能控状态变量数为 2)。

由 C' 第二列对应 A 阵中约旦块的首列, 且其为零, 所以系统不完全能观。(因 C' 第一列不为零, 第三列也不为零, 则能观状态变量数为 2)。

方法三：传递函数矩阵判据法。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & 2(s-1) & -(s-1) \\ 0 & (s-2)^2 & 0 \\ s & -(4s-6) & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} \begin{bmatrix} -(s-1) \\ 0 \\ (s-1)^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ s-1 \end{bmatrix}$$

因分子分母存在公因子 $(s-1)$, 所以系统不完全能控(注: 本系统为单输入系统, 所以上式形成充要条件)。

$$G(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & -(s-2)s & (s-1)(s-2) \end{bmatrix}$$

上式分子分母有公因子 $(s-2)$, 所以系统不完全能观。

方法四: PBH 判据法。

$$\text{rank}[\lambda_1 I - A \quad B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 2 < n=3, \text{ 则系统不完全能控。}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_2 I - A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = 2 < n=3, \text{ 则系统不完全能观。}$$

例 9.17 已知系统状态空间表达式为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = (c_1 \quad c_2) X$$

欲使系统中有一个状态既可控又可观测, 另一个状态为既不可控又不可观测, 试确定 b_1 , b_2 和 c_1 , c_2 应满足的关系。

解 本题要使一个状态既能控又能观, 可通过线性变换将系统方程化为对角形, 利用对角形可观可控判据来分析, 较容易解题。线性变换不改变系统的可控性和可观性。

系统特征方程为

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)$$

特征根为 $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ 。

又因为 A 为友矩阵, 则

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = [c_1 - c_2 \quad c_1 - 2c_2]$$

则对角化后系统状态空间表达式为:

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} 2b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix} \bar{u}, \quad \bar{y} = [c_1 - c_2 \quad c_1 - 2c_2] \bar{X}$$

若 \bar{x}_1 可控可观, 而 \bar{x}_2 不可控不可观, 则应有:

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 \neq 0 \\ c_1 - c_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

若 \bar{x}_1 不可控不可观, 而 \bar{x}_2 可控可观, 则有:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 \neq 0 \\ c_1 - 2c_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} 2b_1 + b_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

例 9.18 对连续时间的线性定常系统 $\Sigma(A, B, C)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1, 2]$$

(1) 试判断系统的可控性、可观性、输出可控性。

(2) 以采样周期 $T=1$, 将系统离散化并判断离散化系统的可控性、可观性和输出可控性。

(3) 以采样周期 $T=2$, 将系统离散化并判断离散化系统的可控性、可观性和输出可控性。

解 输出可控性和状态可控性之间不是等价的, 即输出能控不必须状态能控; 反之, 状态能控也不会必然导致输出能控。另外连续系统离散化后, 可能改变原系统的特性。

A 为模态标准型, 其特征值为: $\lambda_{1,2} = \pm j\pi$; 其状态转移矩阵为:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{bmatrix}$$

其离散化后:

$$G = \Phi(T) = \begin{bmatrix} \cos \pi T & \sin \pi T \\ -\sin \pi T & \cos \pi T \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T \Phi(t) B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \sin \pi t \\ \cos \pi t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} [1 - \cos \pi T] \\ \frac{1}{\pi} \sin \pi T \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

(1) 能控矩阵为 $Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_c = 2 = n$, 则系统完全能控。

能观矩阵 $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2\pi & \pi \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_o = 2 = n$, 则系统完全能观。

输出能控矩阵为 $Q_{oc} = [CB \quad CAB] = [2 \quad \pi]$, $\text{rank} Q_{oc} = 1 = m$ (输出个数), 则输出可控。

(2) $T=1$ 时, 则

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 2]$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_c = 1 < n = 2, \text{则不能控。}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_o = 1 < n = 2, \text{则不能观。}$$

$$Q_{oc} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}, \text{rank} Q_{oc} = 1 = m (=1), \text{则输出可控。}$$

讨论: 因 $I_n(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi$, 则 $T = \frac{2k\pi}{2\pi} \Big|_{k=1} = 1$, 能控能观的连续系统离散化后, 离散化

的系统不能控不能观。另外 $G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 虽然为对角线形, 但该对角线形的特征根并不

互异,而是相等的,这时应用标准形判别系统的能控性或能观性,要注意,不能简单地仅看 $B(H)$ 阵的每行是否全为零或 C 阵的每列是否全为零,而同时要求 $B(H)$ 阵的每行之间线性无关,或 C 阵的每列之间线性无关。本题中即使 H 阵的第 2 个元素不为零,也是不可

控的。若 $H = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $Q_c = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \pi & \pi \\ a & a \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_c = 1 < n$, 则不可控。总之,当 A 或 G 为

对角线标准型时,存在对角线上元素相等的情况,这时判别能控性或能观性,不仅要看其所对应 $B(H)$ 阵行不全为零,而且要求 $B(H)$ 阵这两行之间非线性相关;对于能观性也是如此,要求 C 阵所对应的列线性无关。

(3) 当 $T=2$ 时,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2]$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_c = 0 < n, \text{ 则不可控。}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_o = 1 < n, \text{ 则不可观。}$$

$$Q_{\infty} = [0 \quad 0], \text{rank} Q_{\infty} = 0 < m = 1, \text{ 则输出不可控。}$$

例 9.19 设不可控且不可观测定常系统的动态方程如下,试将系统按可控性或可观性分解为规范型,然后再按可控性与可观性对系统进行结构分解。

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, y = [0 \quad 1 \quad -2] X$$

$$\text{解 } Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_c = 2 < n = 3, \text{ 系统不完全可控。}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_o = 2 < n = 3, \text{ 系统不完全能观。}$$

则系统可控维数为 2, 能观维数也为 2。

方法一:一般方法。

(1) 可控性分解:从 Q_c 矩阵中取 2 列线性无关向量 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;再任取一列向量 P_3 , 如

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 并与前 2 列向量无关, 则构成可控规范型的变换矩阵

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由变换矩阵确定可控规范型为:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CP^{-1} = [1 \quad -1 \quad -2]$$

设 $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_e \end{bmatrix}$, 故有

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -1 \quad -2] \bar{X}$$

其中: 可控子系统为

$$\dot{\bar{X}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{X}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{X}_e, \quad y_1 = [1 \quad -1] \bar{X}_e$$

不可控子系统为

$$\dot{\bar{x}}_e = -\bar{x}_e, \quad y_2 = -2\bar{x}_e$$

(2) 可观性分解: 从 Q_e 矩阵中取 2 行线性无关向量 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 再任取一行向量 t_3 如 $[0 \quad 0 \quad 1]$, 并与前 2 行向量无关, 则构成可观规范型的变换矩阵

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由变换矩阵 T^{-1} 确定的可观规范型为:

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT^{-1} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

故有

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_1 = [1 \quad 0 \quad 0] \bar{X}$$

其中: 可观测子系统为

$$\dot{\bar{X}}_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \bar{X}_o + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y_1 = [1 \quad 0] \bar{X}_o$$

不可观子系统为

$$\dot{\bar{x}}_o = -\bar{x}_o + [1 \quad 0] \bar{x}_o, \quad y_2 = 0$$

(3) 系统按可控可观性分解:

由上述按可控性分解的规范型知, 可控子系统为:

$$\dot{\bar{X}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{X}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{X}_e, \quad y_1 = [1 \quad -1] \bar{X}_e$$

该子系统的可观矩阵为:

$$Q_{oi} = \begin{bmatrix} \bar{C}_c \\ \bar{C}_c \bar{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank } Q_{oi} = 1$$

所以该子系统是不完全可观的,故按可观性分解,其变换矩阵的构成为从 Q_{oi} 中取一行向量如 $[1 \quad -1]$, 另任取一行向量如 $[0 \quad 1]$ 且与前行向量线性无关,则有:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而不可控子系统显然是可观测的,则其可观规范型变换矩阵 T_2 可取单位矩阵,即 $T_2 = I$ 。

由 T_1 和 T_2 构成分块对角矩阵为:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则按可控可观分解后系统规范型如下:

$$\tilde{A} = T_{12} \bar{A} T_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = T_{12} \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \bar{C} T_{12}^{-1} = [1 \quad 0 \quad -2]$$

故 \tilde{x}_1 为可控且可观的状态, \tilde{x}_2 为可控不可观测的状态, \tilde{x}_3 为不可控可观的状态。系统的传递函数为可控可观的子系统的传递函数。

可控可观子系统为 $\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_1 + u$, $y_1 = \tilde{x}_1$, 所以系统传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s+1}$ 。

方法二: 对角化方法。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 3 \\ 0 & -1 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)^3$$

特征值为 $s_{1,2,3} = -1$ 。

$$\text{由 } (\lambda I - A)P_1 = 0, \text{ 得 } P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{由 } (\lambda I - A)P_2 = -P_1, \text{ 得 } P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{由 } (\lambda I - A)P_3 = -P_2, \text{ 得 } P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

$$\text{则 } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{B} = P B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = C P^{-1} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

由上可知等价系统方程为: $\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}u$, $y = \bar{C}\bar{X}$; 其中, $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$, \bar{x}_2 为可控可观状态参数, \bar{x}_1 为可控不可观的状态, \bar{x}_3 为不可控可观的状态。

将令 $\bar{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$ 则 $\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C} = [1 \ 0 \ 0]$, 为

可控可观规范型。

讨论: 两种方法均可求出可控可观的规范型, 方法二较简便。

由于两种方法的规范型状态变量不同, 因而所得的 A , B , C 也不同。若设方法一的规范型状态变量为 \tilde{X}_1 , 方法二的规范型状态变量为 \tilde{X}_2 , 则有

$$\tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{X}_2 = P^{-1} \tilde{X}_2$$

即有 $\tilde{A}_1 = P\tilde{A}_2P^{-1}$, $\tilde{B} = P\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2P^{-1}$ 。

例 9.20 已知系统状态空间表达式为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \ 1 \ 0]X$$

试求系统的能控标准型和能观标准型。

解 (1) $Q_c = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_c = 3 = n$

系统能控, 可以化为能控标准型。

$$|sI - A| = s^3 - 2s^2 + 1 = 0 \quad a_0 = -2, a_1 = 0, a_2 = 1$$

变换矩阵

$$T_c^{-1} = Q_c L = [B \ AB \ A^2B] \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 1 \\ a_0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

能控标准型为

$$\bar{A} = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T_c B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{C} = C T_c^{-1} = [c_1 \ c_2 \ c_3] = [-2 \ 0 \ 1]$$

则其传递函数

$$G(s) = \frac{c_3 s^2 + c_2 s + c_1}{s^3 + a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{s^2 - 2}{s^3 - 2s^2 + 1}$$

$$(2) \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank } Q_o = 3 = n$$

系统完全能观，可以化为能观标准型。

$$T_o = LQ_o = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 1 \\ a_0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则能观标准形为：

$$\bar{A} = T_o A T_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_2 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \bar{B} = T_o B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{C} = C T_o^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

讨论：能控标准型与能观标准型为对偶关系。对于对偶关系的两系统，可用系统 1 的能控性来分析系统 2 的能观性，也可用系统 2 的能观性来分析系统 1 的能控性。因此，在能控能观性分析时，常常重点分析系统的能控性，其能观性可以借助于其对偶系统的能控性来分析。

例 9.21 系统状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [0 \quad 1] X$$

分析系统平衡状态 $X_e = 0$ 的渐近稳定性与系统的 BIBO 稳定性。

解 系统特征多项式为： $|sI - A| = (s-2)(s+3) = 0$

A 的特征值为 $s_1 = 2, s_2 = -3$ ，故系统 $X_e = 0$ 不是渐近稳定的。

系统的传递函数为：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & 6 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & 6 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

由于传递函数 $G(s)$ 的极点位于 s 左半平面，故系统 BIBO 是稳定的。

讨论：渐近稳定性包含了子系统 BIBO 稳定，但一个系统 BIBO 稳定，并不一定能说它是渐近稳定的。当系统 BIBO 是稳定，且系统是能控又能观时，则系统也是渐近稳定的。

有时可利用渐近稳定确定 BIBO 稳定。如证明系统 $G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-\tau}$ 是 BIBO 稳定的，其状态方程为 $\dot{x} = -x + u(t-1)$ ，显然 A 的特征根为 $s = -1$ ，系统是渐近稳定的，那么系统也是 BIBO 稳定的。

例 9.22 已知系统 s 的输入输出微分方程为

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \ddot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 8u(t)$$

试求该系统满足以下各要求的状态空间表达式。

- (1) s 为阶数最小的可控标准系统; (2) s 为不可约简的可观标准型系统;
 (3) s 为既可控又可观的约当形系统; (4) s 为可控不可观系统;
 (5) s 为可观不可控系统; (6) s 为既不可控又不可观系统。

解 本题实际上是实现问题。要求熟悉最小实现的概念。

微分方程进行零初始条件下拉氏变换, 得系统的传递函数:

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 6}{s^3 + 4s + 3} = 1 + \frac{2s + 5}{s^3 + 4s + 3} = 1 + \frac{1.5}{s + 1} + \frac{0.5}{s + 3}$$

(1) 可控标准形为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [5 \quad 2], D = [1]$$

(2) 可观标准形为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [1]$$

(3) 约当标准形为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1.5 \quad 0.5], D = [1]$$

讨论: 由于系统传递函数的分母是 s 的二阶多项式, 而上述三个实现均是二阶的, 故它们均为不可约简的, 既可控可观的最小实现。显然, 满足题中后三个要求的系统均应为非最小实现。将 $G(s)$ 改写为

$$G(s) = 1 + \frac{(2s+5)(s+a)}{(s^2+4s+3)(s+a)} = 1 + \frac{2s^2 + (5+2a)s + 5a}{s^3 + (4+a)s^2 + (3+4a)s + 3a}$$

其中 a 为任意实数。

(4) 可控不可观系统为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3a & -(3+4a) & -(4+a) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [5a \quad 5+2a \quad 2], D = [1]$$

(5) 可观不可控系统为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3a \\ 1 & 0 & -(3+4a) \\ 0 & 1 & -(4+a) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5a \\ 5+2a \\ 2 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1], D = [1]$$

(6) 不可控不可观系统为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1.5 \quad 0.5 \quad 0], D = [1]$$

讨论: 根据最小实现概念, (4)、(5)和(6)都为非最小实现系统, 但它们的传递函数与前三个实现是一致的。必须指出的是, 满足题意(1)和(2)的系统是惟一的, 而满足(3)、(4)、(5)、(6)的系统均有无穷多个, 因(3)、(1)和(2)一样都是一种最小实现, 也就是说最小实现也不是惟一的, 但其维数是惟一的(本题维数为2)。

9.10 习 题

9.1 已知系统传递函数为 $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$, 试将其化为对角线规范型状态空间表达式。

9.2 已知系统传递函数为 $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{(s-2)^3}$, 试将其化为约当规范型状态空间表达式。

9.3 将下列状态方程或状态矩阵化为规范型

$$\textcircled{1} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad \textcircled{2} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\textcircled{3} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} x$$

9.4 系统的状态方程为 $\dot{X} = AX + bu$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u(t) = 1(t)$, 试把系统离散化。 $T = 0.1 \text{ s}$, 并求出 $t = T, 2T, 3T$ 时的状态。

9.5 已知系统描述为 $\begin{cases} \dot{x} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases}$, 其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$C = [0 \ 1 \ 0]$; 求系统的状态转移矩阵及状态转移矩阵的逆阵。

9.6 判断下列函数的矩阵是否为某系统的状态转移矩阵, 若是, 试求出 A 阵。

$$\textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \textcircled{2} \quad \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^t - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

9.7 已知 $\Phi(t, \tau)$ 是 $\dot{x} = A(t)x$ 的状态转移矩阵, 试证:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)A(\tau) \quad (\text{提示: 对 } \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, t) = I \text{ 求导})$$

9.8 试将系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 化为约当规范型, 并求相应的变换阵 P 。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = [1 \ -1]$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 1 \ -1], \quad D = 0$$

9.9 已知系统结构图如图 9-18 所示：

(1) 写出系统的状态空间表达式；

(2) 求从输入 $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 到输出 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 的传递函数矩阵。

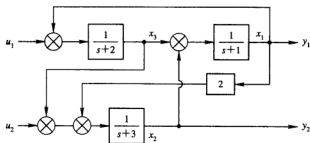


图 9-18

9.10 试求下列各系统的传递函数矩阵

(1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -1 \quad 1]$, $D = 1$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = [0 \quad 0 \quad 1]$, $D = 0$

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

9.11 某系统结构如图 9-19 所示，要求加入串联、前馈补偿后，使系统闭环传递函数矩阵为：

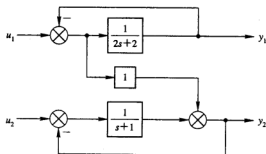


图 9-19

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

9.12 系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

已知 $u(t) = e^{-t}$, $y(t) = 2 - \beta t e^{-t}$, $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$, 求 $x_1(0)$, $x_2(0)$ 。若 $\beta = 0$, 能求出 $x_1(0)$, $x_2(0)$ 吗? 为什么?

9.13 已知离散系统状态方程为

$$X_{k+1} = GX_k + Hu_k$$

其中 $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_k = 1$; 试求状态解 X_k 。

9.14 如图 9-20 所示系统, 写出以 x_1, x_2, x_3 为状态变量, y 为输出时, 系统的动力学方程, 并判定系统的能控性与能观性。

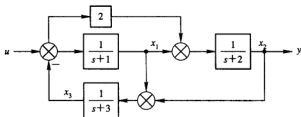


图 9-20

9.15 设两个可控可观测的单输入单输出系统为 S_1, S_2

$$S_1: \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1, \quad y_1 = c_1 x_1$$

其中: $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$S_2: \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2, \quad y_2 = c_2 x_2$$

其中: $A_2 = -1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$

① 当 S_1, S_2 按图 9-21 所示并联连接时, 试

推导关于 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 的状态方程;

② 判断并联系统的可控性与可观性;

③ 求系统 S_1, S_2 的传递函数, 并对②的结构进行讨论。

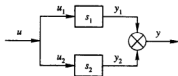


图 9-21

9.16 系统的状态空间表达式为:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

① 按能控能观性进行结构分解; ② 求出系统的传递函数矩阵。

9.17 设系统 $\Sigma=(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 已化成约当标准型如下, 试将系统按能控性和能观性进行分解。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

9.18 已知系统的状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

① 若系统输入 $u=0$, 判别系统的稳定性;

② 判别该系统是否能控, 能观;

③ 能否设计 $u=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3$ 的控制器, 使得系统闭环稳定? (k_1, k_2, k_3 为定常系数)

9.19 设有一个三阶系统

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = [a \quad b \quad c] \mathbf{X}$$

① 能否适当地选择常数 a, b 和 c 使系统具有能控性?

② 能否适当地选择常数 a, b 和 c 使系统具有能观性?

9.20 试将系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 化为可控规范型或可观规范型, 并求出相应的变换矩阵 \mathbf{T} 。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1 \quad 2]$$

9.21 试用李亚普诺夫方法判断下述非线性系统在原点平衡状态的稳定性。

$$\textcircled{1} \dot{x} = -x - 3x^3 \quad \textcircled{2} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^5 \end{cases} \quad \textcircled{3} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

9.22 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \quad a) \mathbf{X}$$

- ① 试求状态转移矩阵；
- ② 为保证系统状态的能观性， a 应取何值？
- ③ 试求状态空间表达式的能观规范型；
- ④ 用李亚普诺夫第二方法判断系统的稳定性。

9.23 试用李亚普诺夫第二方法分析系统的稳定性(用变量梯度法)

$$\textcircled{1} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_2^2 - 1) \end{cases}$$

9.24 设非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^5 \end{cases}$$

试用拉索夫法确定原点为大范围渐近稳定时，参数 a 和 b 的取值范围。

9.25 设一维系统的状态方程为 $\dot{x}(t) = -2t(t+1)^{-2}x(t)$ ，问 $x=0$ 是否稳定？是否一致稳定？是否渐近稳定？是否一致渐近稳定？

第 10 章 线性定常系统的综合——状态反馈与状态观测器

10.1 本章要求

- (1) 掌握各种反馈连接的基本形式，以及对系统能控性和能观性的影响。
- (2) 掌握闭环极点配置的基本方法，以及能实现任意极点配置的前提。
- (3) 掌握状态观测器的构成原理和实现条件，以及重点掌握通过状态观测器实现状态反馈的原理和状态变量图的绘制。
- (4) 了解镇定、实现和解耦问题的有关概念；熟悉串联的解耦方法。

10.2 基本概念——反馈控制系统的基本结构及其特性

考虑一个线性定常系统： $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ ：

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

这里，状态 X 、输入 U 、输出 Y 分别为 n 、 r 、 q 维向量， $A_{n \times n}$ 、 $B_{n \times r}$ 、 $C_{q \times n}$ 、 $D_{q \times r}$ 为相应维数的常值矩阵。不失一般性，在以下的讨论中，假设系统为绝对固有系统，即 $D=0$ 。由反馈信号的取出点及其施加点的位置不同，可将反馈系统进行分类。

1. 状态反馈

将系统的每一个状态变量乘以相应的反馈系数，然后反馈到输入端与参考输入相加形成控制律，作为受控系统的控制输入称为状态反馈。参见图 10-1。图中 K 为 $r \times n$ 状态反馈增益矩阵，参考输入 V 为 r 维向量。

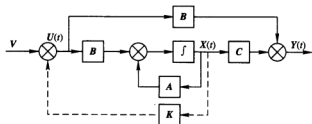


图 10-1 状态反馈

闭环系统的传递函数矩阵为：

$$G_k(s) = C[sI - (A + BK)]^{-1}B$$

特点:开环系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 与通过状态反馈增益矩阵 K 后所形成的闭环系统 $\Sigma_k = (A+BK, B, C, D)$ 具有相同的维数, 并且 Σ_k 不改变 Σ_0 的能控性, 但不保证系统的能观测性不变; 在 Σ_0 能控的条件下, 可通过 K 的选择自由地改变闭环系统 Σ_k 的特征值。状态反馈可改变闭环极点, 但不改变闭环零点(除零极点相重情况外)。状态反馈可调节的参数个数为 $r \times n$ 。

2. 输出反馈

将系统的每一个输出变量乘以相应的反馈系数, 然后反馈到输入端与参考输入相加形成控制律, 作为受控系统的控制输入称为输出反馈。参见图 10-2。图中 H 为 $r \times q$ 输出反馈增益矩阵, 参考输入 V 为 r 维向量。

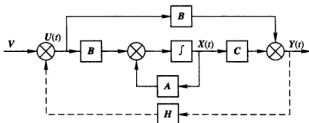


图 10-2 输出反馈

闭环系统的传递函数矩阵

$$G_H(s) = C[sI - (A + BHC)]^{-1}B$$

若开环传递函数 $G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$, 则 $G_0(s)$ 与 $G_H(s)$ 存在下列关系:

$$G_H(s) = G_0(s)[I - HG_0(s)]^{-1} \quad \text{或} \quad G_H(s) = [I - G_0(s)H]^{-1}G_0(s)$$

特点:开环系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 与通过输出反馈增益矩阵 H 后所形成的闭环系统 $\Sigma_k = (A+BHC, B, C, D)$ 具有相同的维数, 并且 Σ_H 不改变 Σ_0 的能控性和能观测性; 在 Σ_0 完全能观测的条件下, 通过带动态补偿器的输出反馈在一定条件下能实现任意极点的配置; 但仅有输出反馈不能实现任意极点的配置。输出反馈可调节的参数个数为 $r \times q$ 。

由于一般情况下 $q < n$, 所以 H 可供选择的自由度远比 K 小, 因而输出反馈只能相当于一种部分状态反馈。因此在不增加补偿器的条件下, 输出反馈的效果显然不如状态反馈系统好; 但输出反馈在技术实现上的方便性是其突出的优点。

3. 输出内反馈(从输出到状态矢量导数 \dot{x} 反馈)

将系统的每一个输出变量乘以相应的反馈系数, 然后反馈到状态矢量导数 \dot{x} 的线性反馈形式称为输出内反馈。参见图 10-3。图中 G 为 $n \times r$ 输出内反馈增益矩阵, 参考输入 V 为 r 维向量。

闭环系统的传递函数矩阵

$$G_G(s) = C[sI - (A + GC)]^{-1}B$$

特点:开环系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 与通过输出内反馈增益矩阵 G 后所形成的闭环系统 $\Sigma_k = (A+GC, B, C, D)$ 具有相同的维数, 并且 Σ_G 不改变 Σ_0 的能观测性, 但不能保证能控性; 在 Σ_0 完全能观测的条件下, 可实现全维状态观测器, 也能实现任意极点的配置。

输出内反馈可调节的参数个数为 $n \times r$ 。它与状态反馈形成对偶关系。

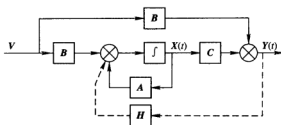


图 10-3 输出内反馈

4. 动态补偿器

上述三种反馈基本结构的共同点是，不增加新的状态变量，系统开环与闭环同维；其次反馈增益矩阵都是常数，反馈为线性反馈。在更复杂的情况下，常常要通过引入一个动态子系统来改善系统性能，这种动态子系统 $\Sigma_d = (A_d, B_d, C_d, D_d)$ ，称为动态补偿器。参见图 10-4。图(a)为串联连接，图(b)为反馈连接。它的维数是 Σ_d 与 Σ_o 二者维数之和。闭环系统的维数和特性均发生变化。

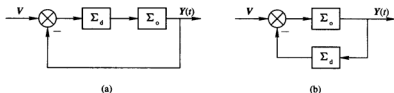


图 10-4 动态补偿器

10.3 极点配置

控制系统的性能主要取决于系统极点在复平面上的分布。因此，作为综合系统性能的一种形式，往往给出一组期望极点 $(-s_1, -s_2, \dots, -s_n)$ ，或者根据时域指标转化成一组等价的期望极点。极点配置问题就是通过选择反馈增益矩阵，将闭环系统的极点恰好地配置在复平面上所期望的位置，以获得所期望的动态特性。为简单起见，只讨论单输入—单输出系统。

定理 采用状态反馈对系统 $\Sigma_o = (A, B, C, D)$ 任意极点配置的充要条件是系统 Σ_o 是完全能控的。

系统 Σ_o 的特征方程为：

$$f(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

期望的特征方程为：

$$f^*(s) = \det[sI - (A + BK)] = \prod_{i=1}^n (s + s_i) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \dots + a_1^*s + a_0^* = 0$$

当系统 Σ_0 是完全能控时, 实现任意极点配置的反馈增益矩阵 K 中的所有元素可从下式得到 n 个方程, 惟一求出 n 个未知量。

$$\det[sI - (A + BK)] = \prod_{i=1}^n (s + s_i)$$

说明:

(1) 因系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 是完全能控的, 则可通过非奇异变换矩阵 T (其求法见能控规范型部分) 变化为能控规范型 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, 同时状态反馈增益矩阵 K 变化为:

$$\bar{K} = KT = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1}]$$

此时 K 可由式 $K = \bar{K}T^{-1}$ 求得。其中

$$\bar{A} = TAT^{-1} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = TB = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CT^{-1} = CP$$

(2) 对于能控的系统 Σ_0 , 引入状态反馈进行极点配置时不改变系统零点。参见下列开环传递函数和闭环传递函数二式。式中分子系数为 \bar{C} 的元素即 $\bar{C} = CT^{-1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$, 分母系数分别为其特征方程系数。

系统 Σ_0 的传递函数为:

$$\begin{aligned} {}^nG(s) &= C[sI - A]^{-1}B = \bar{C}[sI - \bar{A}]^{-1}\bar{B} \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \end{aligned}$$

状态反馈的闭环系统传递函数为:

$$\begin{aligned} G_k(s) &= C[sI - (A + BK)]^{-1}B = \bar{C}[sI - (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})]^{-1}\bar{B} \\ &= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*} \end{aligned}$$

定理 1 对完全能控的单输入单输出系统 Σ_0 , 不能采用输出线性反馈实现闭环极点的任意配置。

定理 2 对完全能控的单输入单输出系统 Σ_0 , 通过带动态补偿器的输出线性反馈实现闭环极点的任意配置的充要条件是: Σ_0 完全能观测, 动态补偿器的阶次是 $n-1$ 。

定理 3 对单输入单输出系统 Σ_0 , 采用输出内反馈实现闭环极点的充要条件是系统 Σ_0 完全能观测。

因 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 能观测, 则其对偶系统 $\Sigma' = (A^T, C^T, B^T)$ 必完全能控, 因而可以任意配置 $(A^T + C^T G^T)$ 的特征值; 对 $(A^T + C^T G^T)$ 极点任意配置等价于对 $(A + GC)$ 极点任意配置。

10.4 镇定问题

所谓的镇定问题, 就是对受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 能否通过反馈使其极点均具有负实部, 保证系统是渐近稳定的。镇定问题是系统极点配置问题的一种特殊情况。显然上述对于通过线性反馈能实现任意极点配置的系统是能镇定的系统。由于镇定问题仅需闭环系统渐近稳定, 并不要求将闭环极点配置到指定的位置, 因此, 系统镇定问题要比实现任意配置所需要的条件宽松, 也就是说满足上述能实现任意极点配置定理条件的系统能镇定, 不满足上述定理的系统也可能镇定。有关定理具体如下:

定理 对于系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 采用状态反馈能镇定的充要条件是其不能控子系统为渐近稳定的。

对于不完全能控的系统, 通过线性变换可将其按能控性分解为:

$$\bar{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = R_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = C R_c = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2]$$

由于线性变换不改变系统的特征值, 则有 $\det[sI - A] = \det[sI_1 - \bar{A}_{11}] \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]$ 。通过状态反馈后有 $\bar{K} = K R_c^{-1} = [\bar{K}_1 \quad \bar{K}_2]$ 。那么闭环系统的状态矩阵为:

$$\bar{A} + \bar{B} \bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_1 \bar{K}_2 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

闭环系统特征多项式为:

$$\det[sI - (A + BK)] = \det[sI - (\bar{A} + \bar{B} \bar{K})] = \det[sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{K}_1)] \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]$$

上式说明, 当不能控部分的状态矩阵 \bar{A}_{22} 的特征值实部为负(即不能控部分是渐近稳定的), 能控部分可通过反馈矩阵 \bar{K}_1 实现任意极点配置, 从而保证系统镇定。

定理 1 对于系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 采用输出内反馈能镇定的充要条件是其不能观测子系统为渐近稳定的。(注: 输出内反馈情况为状态反馈的对偶关系。)

定理 2 对于系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 通过输出反馈能镇定的充要条件是其结构分解中的能控且能观测子系统是输出反馈能镇定的, 其余子系统是渐近稳定的。

10.5 解耦问题

对于多变量系统, 其输出向量 $Y(s)$ 和输入向量 $R(s)$ 有如下关系:

$$Y(s) = G(s)R(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qr}(s) \end{bmatrix} R(s)$$

其中 $G(s)$ 为 $q \times r$ 的传递函数矩阵, r 为输入个数, q 为输出个数。则有

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s) + \cdots + G_{1r}(s)R_r(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s) + \cdots + G_{2r}(s)R_r(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) = G_{q1}(s)R_1(s) + G_{q2}(s)R_2(s) + \cdots + G_{qr}(s)R_r(s) \end{cases}$$

显然, 每一个输入信号对所有输出有影响, 而每一个输出又受到所有输入的控制。要想确定一个输入去调整一个输出, 而又不影响其它输出, 这几乎是不可能的, 这种现象称为耦合。多变量系统的相互耦合给系统的控制带来了巨大的困难。因此, 如果能找出一些控制规律来消除这种耦合, 使每个输入只控制相应的输出, 这种消除耦合的方法称为解耦。解耦系统的控制称为自治控制。

解耦系统指的是在输入向量和输出向量具有相同维数($r=q=m \leq n$)的情况下, 系统的传递函数矩阵是对角线化的非奇异矩阵, 即 $G(s)$ 矩阵中的元素为:

$$G_{ij}(s) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ G_{ii}(s), & i = j \end{cases}$$

这样一个多变量系统实际上可以看作是由 m 个独立的子系统组成的。

对于具有相互耦合关系的维数相同的多输入多输出系统,可以采用输出反馈加补偿器的方法来使其得到解耦,见图 10-5,也可采用状态反馈实现解耦。在此仅介绍前者,后者请参考有关文献。

对于图 10-5 所示的解耦方法称为串联解耦。

图 10-5 中存在如下关系:

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

$$G_0(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$G_0(s) = G(s)[I - G(s)]^{-1}$$

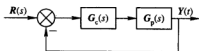


图 10-5 串联解耦

解耦即是要求 $G(s)$ 为对角矩阵,从以上关系可知此时 $G_0(s)$ 也必然为对角矩阵。由于 $G_0(s) = G_c(s)G_p(s)$, 而 $G_p(s)$ 为被控对象是给定的,无疑要靠 $G_c(s)$ 来保证 $G_0(s)$ 的对角化。如果 $G_p^{-1}(s)$ 存在,则解耦的串联补偿器 $G_c(s)$ 为: $G_c(s) = G_p^{-1}(s)G_0(s)$ 。

$G_c(s)$ 的求解过程为:首先根据对 $G(s)$ 的要求确定 $G_0(s) = G(s)[I - G(s)]^{-1}$,再由式 $G_c(s) = G_p^{-1}(s)G_0(s)$ 求得 $G_c(s)$ 。

10.6 状态观测器

系统引入状态反馈可以改善系统的性能。然而系统的状态变量并不是直接能检测得到的,有些状态变量甚至根本无法检测。这样,就提出了状态观测或状态重构问题。所谓的状态观测就是根据系统的输入量、输出量和系统的结构和参数来重构系统的状态。运用重构的状态代替原系统中不能或难于获得的状态变量去实现状态反馈,这是状态观测的目的。实现状态重构的系统称为状态观测器。

系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

假如系统的状态不能得到,也就不能实现状态反馈。直观的想法是重构一个系统 $\Sigma_1 = (A, B, C)$, 该系统的输入、结构和参数与系统 Σ_0 相同,其运动方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t) + BU(t) \\ \bar{Y}(t) = C\bar{X}(t) \end{cases}$$

如果两系统的初始状态相同 $X(0) = \bar{X}(0)$, 根据解的惟一性则有 $X(t) = \bar{X}(t)$ 、 $Y(t) = \bar{Y}(t)$, 那么系统 Σ_1 就为系统 Σ_0 的状态观测器。实际上, $X(0) = \bar{X}(0)$ 很难做到或根本不能实现,也就不能保证 $X(t) = \bar{X}(t)$ 、 $Y(t) = \bar{Y}(t)$ 成立。一个自然的想法是利用 $[Y(t) - \bar{Y}(t)]$ 误差去调节系统 Σ_1 , 也就是运用负反馈的作用,使 $\bar{X}(t)$ 能够逼近 $X(t)$ 。将误差 $[Y(t) - \bar{Y}(t)]$ 通过反馈矩阵 G 反馈到系统 Σ_1 的 $\dot{\bar{X}}$ 处,去调节系统 Σ_1 。系统 Σ_1 的运动方程校正如下:

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t) + BU(t) + G[Y(t) - \bar{Y}(t)] = (A - GC)\bar{X} + BU + GY$$

这就是所设计的状态观测器的运动方程,参见图 10-6;其中 G 为 $n \times r$ 型矩阵。

由上可得

$$\dot{X} - \dot{\bar{X}} = (A - GC)(X - \bar{X})$$

如果能适当地选择 G 阵, 使 $(A - GC)$ 的特征值具有负实部, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (X - \bar{X}) = 0$ 。

因输出内反馈的闭环状态矩阵为 $(A - GC)$, G 阵类似于输出内反馈增益矩阵。从输出内反馈镇定定理可知, 只要系统 Σ_0 的不能观测部分是渐近稳定的, 就可通过选择适当的 G 阵, 使矩阵 $(A - GC)$ 的特征值具有负实部。也就是说, 状态观测器的存在是有条件的。具体见下定理。

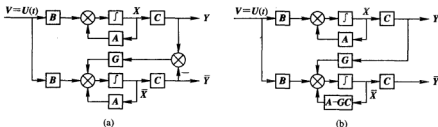


图 10-6 状态观测器

定理 系统的状态观测器存在的充要条件是系统完全能观测或虽系统不能完全观测但不能观测部分的特征值具有负实部。

说明

(1) 应当指出, 当系统 Σ_0 不完全能观测但不能观测部分是渐近稳定的, 虽然仍可构造状态观测器, 但这时, $\bar{X}(t)$ 趋近于 $X(t)$ 的速度将不能由 G 的选择去控制, 而要受到不能观测子系统极点位置的限制。

(2) 一般希望 $\bar{X}(t)$ 趋近于 $X(t)$ 的速度要快, 也就是要求 $(A - GC)$ 的所有特征值具有一定的负实部, 即 $(A - GC)$ 的特征值能实现任意极点配置, 此时要求系统是完全能观测的。

(3) 一般不仅希望观测器的极点 (即 $(A - GC)$ 的特征值) 一定要具有负实部, 而且要求比原系统 Σ_0 的特征值更负, 这样重构的状态可以尽快地逼近状态 $X(t)$, 同时要求在系统未进入稳态时, $\bar{X}(t)$ 几乎已趋近于 $X(t)$ 。

(4) 状态观测器的特征值与原系统 Σ_0 的特征值相比, 又不能太负。若特征值太负, 则状态观测器的频带很宽, 抗干扰能力低。同时要考虑到, 因系统参数的变化引起状态观测器的性能有很大的变化, 以致于失稳。

10.7 带状态观测器的状态反馈系统

状态观测器解决了状态重构问题。为状态不能或难于获得的系统实现状态反馈提供了一条思路。对于线性定常的受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 用状态观测器对其状态进行观测, 并用状态观测器 $\Sigma_1 = (A, B, C)$ 的状态代替真实系统 Σ_0 的状态, 进行状态反馈, 得到一个带状态观测器的状态反馈系统。见图 10-7。

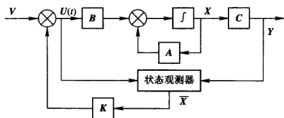


图 10-7 带状态观测器的状态反馈原理

假设状态观测器是全维的, 其运动方程为 $\dot{\bar{X}} = (A - GC)\bar{X} + BU + GY$, 状态反馈控制律为: $U = V + K\bar{X}$, 则带状态观测器的状态反馈系统是一个组合系统, 见图 10-8, 其运动方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\bar{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \bar{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} V \quad Y = [C \ 0] \begin{bmatrix} X \\ \bar{X} \end{bmatrix}$$

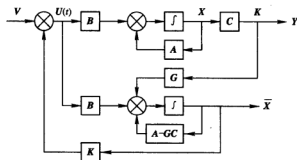


图 10-8 带状态观测器的状态反馈系统

说明:

(1) 带状态观测器的状态反馈系统总维数是原系统 Σ_0 的维数和观测器 Σ_1 的维数之和。当状态观测器是全维时, 闭环系统的总维数是 $2n$ 。

(2) 闭环极点设计的分离性。闭环系统的特征多项式等于原系统 Σ_0 的真实状态进行状态反馈的特征多项式(即矩阵特征多项式 $A + BK$ 的特征多项式)与状态观测器特征多项式(即矩阵特征多项式 $A - GC$ 的特征多项式)的乘积。即有

$$\left| sI - \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \right| = |sI - (A + BK)| |sI - (A - GC)|$$

上式说明闭环系统的极点等于直接状态反馈矩阵 $(A + BK)$ 的极点和状态观测器 $(A - GC)$ 的极点之和, 而且二者相互独立。因此, 只要系统是能控能观测的, 则系统的状态反馈阵 K 和观测器反馈阵 G 可分别进行设计。

(3) 传递函数不变性。带状态观测器的状态反馈系统的传递函数等于直接状态反馈闭环系统的传递函数。即有

$$[C \ 0] \left[sI - \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = C[sI - (A + BK)]^{-1} B$$

上式表明传递函数矩阵与是否采用状态观测器无关。实际上, 由于观测器的极点已全部被闭环系统的零点抵消, 因此, 闭环系统是不完全能控的。观测器的误差 $(X - \bar{X})$ 既不能控也不能观测, 但它不影响系统的正常工作。

(4) 观测器反馈与直接状态反馈的等效性。通过适当地选择 G 阵, 使 $(A - GC)$ 的特征值具有负实部, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 进入稳态时, $\bar{X}(t)$ 与 $X(t)$ 等价; 此时观测器反馈与直接状态反馈完全等价。这表明只有在 $t \rightarrow \infty$ 时, 观测器反馈与直接状态反馈是等价的。在实际应用中, 可通过适当地选择 G 阵, 加快 $\bar{X}(t)$ 趋近于 $X(t)$ 的速度; 使观测器反馈与直接状态反馈在有限的时间内几乎达到等效。

10.8 例题讲解

本章重点有两方面内容: 一是状态反馈极点配置的设计; 二是状态观测器的设计。

例 10.1 系统的状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 试用状态反馈来镇定系统。

解 镇定是极点配置的一种特殊情况。若系统不能控的部分是渐近稳定的, 则可用状态反馈使系统镇定。系统的特征方程为:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 6 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) = 0$$

解得 $s_1 = -1$, $s_2 = 2$, 可见系统是不稳定的。

$\text{rank}[B \ AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$, 所以系统不完全能控 (rank 表示秩)

方法一: 先化为对角线标准形。

$$\text{变换阵 } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ 又有 } \bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \bar{B} = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

则 $s_1 = -1$ 所对应的状态 \bar{X}_1 不能控, $s_2 = 2$ 所对应的状态 \bar{X}_2 能控。

对能控部分: $\dot{\bar{X}}_2 = 2\bar{X}_2 - 2u$, 进行状态反馈 $\bar{K}_2 = k_2$

能控部分状态反馈后闭环系统的特征方程为:

$$|sI - (A_c + b_c \bar{K}_c)| = |s - (2 - 2 \times k_2)| = s - 2 + 2k_2 = 0$$

假设 s_2 点镇定后为 -3 , 则 $2 - 2k_2 = -3$, $k_2 = \frac{5}{2}$, 状态反馈阵 $\bar{K} = [k_1 \ k_2] = \left(0 \ \frac{5}{2}\right)$

原系统用状态反馈阵 $K = \bar{K}P = [0 \ -5]$, 使系统镇定。

方法二: 先按能控性分解: $T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{分解后系统为} \quad \dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u = TAT^{-1}\hat{X} + Tbu$$

设期望特征多项式为 $(s+1)(s+3)=s^2+4s+3=0$ (即使 s_2 镇定后为 -3)

$$\text{令} \quad \bar{K} = [k_1 \quad 0], \quad |sI - (\bar{A} + b\bar{K}^T)| = \begin{vmatrix} s-2-k_1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 - (1+k_1)s - (2+k_1)$$

解得 $k_1 = -5$ 。

则原系统状态反馈阵 $K = \bar{K}T = [0 \quad -5]$

例 10.2 系统状态方程为：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试判定系统是否可用状态反馈 $u = KX + v$ ，分别配置以下两组闭环特征值： $\{-2 \ -2 \ -1\}$ 、 $\{-2 \ -2 \ -3\}$ ，若能配置，则求出反馈增益向量 K 。

解 本题要熟悉实现极点任意配置的条件即状态完全能控。若系统不能控，但可对能控部分的极点实现任意配置。

判定系统可控性：

$$Q_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} Q_c = 2 < n = 3$$

故系统不可控，不能实现极点的任意配置。

原系统特征方程为

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 3 & s-1 \end{vmatrix} = (s+1)(s-0.5+j\sqrt{2.75})(s-0.5-j\sqrt{2.75})$$

有一特征根本来就在 $s = -1$ 处，而且由状态方程可以看出，正是该特征根对应的状态不可控，所以可以利用系统的可控子系统将另两个极点配置到 $\{-2 \ -2\}$ ，实现第一组闭环特征值的配置。

方法一：可控子系统状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$|sI + (A_c + b_c K_c)| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_2 \quad k_3] \right|$$

$$= s^2 + (-k_3 - 1)s + (3 - k_2)$$

期望特征方程为

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

比较上两式得 $K_c = [k_2 \quad k_3] = [-1 \quad -5]$ ，故 $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [0 \quad -1 \quad -5]$ ，将闭环极点配置到 $(-1 \ -2 \ -2)$ ，用状态反馈不能实现第二组闭环极点配置。

方法二：将 A 化为标准形

由 $\lambda_1 = -1$, $(\lambda_1 I - A)P_1 = 0$, 得 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 由 $\lambda_2 = 0.5 - j\sqrt{2.75}$, $(\lambda_2 I - A)P_2 = 0$, 得

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 + j\sqrt{2.75} \end{bmatrix}$$

则令:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{2.75} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{0.5}{\sqrt{2.75}} & \frac{1}{\sqrt{2.75}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & \sqrt{2.75} \\ 0 & -\sqrt{2.75} & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2.75}} \end{bmatrix}$$

可控子系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & \sqrt{2.75} \\ -\sqrt{2.75} & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2.75}} \end{bmatrix} u$$

令

$$|sI - (\bar{A}_c + \bar{b}_c \bar{K}_c)| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & \sqrt{2.75} \\ -\sqrt{2.75} & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2.75}} \end{bmatrix} [\bar{k}_2 \quad \bar{k}_3] \Bigg|$$

$$= s^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2.75}} \bar{k}_3 - 1 \right) s + 3 - \bar{k}_2 + \frac{0.5}{\sqrt{2.75}} \bar{k}_3 = 0$$

希望特征方程为

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$$

比较上两式, 得 $\bar{K}_2 = -3.5$, $\bar{K}_3 = -5\sqrt{2.75}$ 。则

$$\bar{K} = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3] = [0 \quad -3.5 \quad -5\sqrt{2.75}]$$

故原系统状态反馈阵为

$$K = \bar{K}P = [0 \quad -1 \quad -5]$$

由于第二组闭环极点不包含不能控状态所对应的极点, 所以用状态反馈不能实现第二组闭环极点的配置。

例 10.3 已知双人双出系统传递矩阵为 $G_c(s)$, 反馈矩阵为单位矩阵, 若要求闭环传递函数矩阵为 $G(s)$, 试设计串联补偿器 $G_c(s)$ 。其中

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

解 本题为串联解耦系统的设计问题。参见图 10-9。

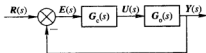


图 10-9

系统闭环传递函数:

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_o(s)\mathbf{G}_c(s)]^{-1}\mathbf{G}_o(s)\mathbf{G}_c(s)$$

设 $\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{G}_o(s)\mathbf{G}_c(s)$, 则

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_p(s)]^{-1}\mathbf{G}_p(s)$$

$$\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{G}_c(s)[\mathbf{I} - \mathbf{G}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{5s}{5s+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

则串联补偿器

$$\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{G}_p^{-1}(s)\mathbf{G}_p(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ -\frac{(s+1)(2s+1)}{2} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

例 10.4 设受控系统的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(s+6)}$, 用状态反馈将闭环系统极点配置为 $-4 \pm j6$. 并设计实现上述反馈的全维观测器(设其极点为 $-10, -10$).

解 本题要求熟悉状态观测器的状态方程构成, 以及观测器极点任意配置的条件(即能观性)。

为方便设计观测器, 可将 $G(s) = \frac{1}{s^2+6s}$ 的实现写为能观标准型如下:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{X}$$

显然上述系统既是能控的又是能观的, 因而存在状态反馈及状态观测器并能实现任意极点配置。

(1) 求状态反馈阵 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = [k_1, k_2]$

则闭环系统矩阵为:

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

闭环特征多项式为:

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})| = \lambda^2 + (6 - k_1)\lambda + (-6k_1 - k_2)$$

期望特征多项式为:

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 4 - j6)(\lambda + 4 + j6) = \lambda^2 + 8\lambda + 52$$

比较上二式得 $K = [-2, -40]$ 。

(2) 求全维观测器。令 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, 得

$$A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 \\ 1 & -(6+g_2) \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A - GC)| = \lambda^2 + (6+g_2)\lambda + g_1$$

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

比较上两式得

$$G = \begin{bmatrix} 100 \\ 14 \end{bmatrix}$$

则全维观测器方程为:

$$\dot{\hat{X}} = (A - GC)\hat{X} + Gy + Bu = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 100 \\ 14 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

或

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + G(y - \hat{y}) + Bu, \quad \hat{y} = C\hat{X}$$

闭环系统结构图如图 10-10 所示, 其中图(a)和图(b)是等价的。

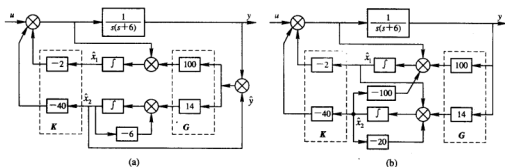


图 10-10

例 10.5 已知系统为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

试设计一状态反馈, 使其闭环极点为 $\{-1, -2, -1+j, -1-j\}$ 。

解 原系统的特征方程为

$$|sI - A| = 0, \quad s^4 - 11s^2 = 0$$

其特征值为

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -\sqrt{11}, \quad s_4 = \sqrt{11}$$

显然原系统是不稳定的, 要通过设计状态反馈使系统稳定。

首先验证能控性, 以确定 K 阵的存在性。

$$\text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

故系统能控, K 阵是存在的。

方法一: 直接法。

闭环特征多项式为:

$$|sI - (A + BK)| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & -1+k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & 11-k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= s^4 + (k_4 - k_2)s^3 + (k_3 - k_1 - 11)s^2 + 10k_2s + 10k_1 = 0$$

期望闭环特征多项式为:

$$(s+1)(s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$$

比较上两式得: $k_1 = 0.4$, $k_2 = 1$, $k_3 = 21.4$, $k_4 = 6$ 。

则得状态反馈阵为 $K = [0.4 \quad 1 \quad 21.4 \quad 6]$ 。

方法二: 按标准形求 K 阵。

$$a_1 = 0, a_2 = -11, a_3 = 0, a_4 = 0$$

被控系统化为能控标准形的非奇异变换阵为 T_c 。

$$T_c^{-1} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 & 1 \\ -11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T_c = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$\hat{A} = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}, \hat{b} = T_c b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故闭环特征方程为:

$$\begin{aligned} |sI - (\hat{A} + b\hat{K})| &= s^4 + (a_1 - k_4')s^3 + (a_2 - k_3')s^2 + (a_3 - k_2')s + (a_4 - k_1') \\ &= s^4 - k_4's^3 + (-11 - k_3')s^2 - k_2's - k_1' = 0 \end{aligned}$$

期望特征方程为:

$$s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$$

比较上两式, 得 $k_1' = -1$, $k_2' = -10$, $k_3' = -21$, $k_4' = -5$ 。

原系统的反馈阵为

$$K = \hat{K}T_e = [0.4 \quad 1 \quad 21.4 \quad 6]$$

例 10.6 已知系统状态方程为:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1 \quad 0]X$$

试设计全维状态观测器, 使其极点为 $-3, -4, -5$ 。

解 检验能观性 $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 3$, 所以系统是可观的, 可构造 G 。

方法一: 将系统化为能观标准形。

系统特征多项式为:

$$|sI - A| = (s-1)(s-2)^2 = s^3 - 5s^2 + 8s - 4 = 0; \quad a_1 = -5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = -4$$

$$T_s = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

由上得

$$\hat{A} = T_s A T_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = T_s B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = C T_s^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

观测器特征多项式为:

$$|sI - (\hat{A} - \hat{G}\hat{C})| = s^3 + (\hat{g}_3 - 5)s^2 + (\hat{g}_2 + 8)s + \hat{g}_1 - 4 = 0$$

观测器期望多项式为:

$$(s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60 = 0$$

比较上两式系数得: $\hat{g}_1 = 64$, $\hat{g}_2 = 39$, $\hat{g}_3 = 17$ 。则观测器反馈阵为:

$$G = T_s \hat{G}_o = \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$$

全维状态观测器状态方程为:

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{G}y = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y$$

方法二：直接法。

观测器特征多项式为：

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right| \\ &= s^3 + [g_1 + g_2 - 5]s^2 + [g_3 - 3g_2 - 4g_1 + 8]s + [4g_1 + 2g_2 - g_3 - 4] \\ &= 0 \end{aligned}$$

观测器期望特征方程为：

$$(s+3)(s+4)(s+15) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60 = 0$$

比较上两式系数得 $g_1 = 120$, $g_2 = -103$, $g_3 = 210$ 。

则观测器反馈阵为：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix}$$

全维状态观测器为：

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{G}y = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y$$

讨论：设计状态反馈阵 \mathbf{K} 和状态观测器的 \mathbf{G} 阵时，首先要确定期望的极点位置。对于 \mathbf{K} 阵，需要知道期望的闭环极点；对于 \mathbf{G} 阵，需要知道观测器期望的闭环极点。期望的极点可能直接给出，也可能通过其它的性能指标间接给出，这时需要换算。观测器设计时，有时已知的是，要求观测器的状态变量以多大的衰减速度逼近原系统的状态变量，这实际上就是要求 $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ 阵的特征值的实部小于某数，也就是特征值位于 s 平面某条平行于虚轴的左侧。

10.9 习 题

10.1 已知解耦系统的传递函数矩阵为 $G_o(s)$ ，求一串联补偿器使系统解耦，且其传递函数矩阵为 $G(s)$ ，其中

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

10.2 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

① 判断系统的可控性, 可观性;

② 要求采用状态反馈后系统闭环极点为 $-1, -2, -2$, 试设计该系统。

10.3 系统状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 试分析系统能否用状态反馈实现超调量 $\delta\% = 4.3\%$ 。

10.4 已知开环系统状态方程为 $\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$, $y = [0 \ 1]X$, 若构成状态反馈系统, 反馈阵 $K = [1 \ 0]$, 试分别证明开环系统与闭环系统的可控性和可观性。

10.5 判断下述系统是否镇定, 若是能镇定的, 试设计一状态反馈使系统成为稳定的。

$$\textcircled{1} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \textcircled{2} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

10.6 设一系统具有如下传递函数

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问利用状态反馈 $U = r + KX$ 能否将系统的传递函数变为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

如有可能, 请求出状态反馈阵 K 。

10.7 已知系统的传递函数为 $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$

① 若状态不能直接量测到, 试采用全维观测器实现状态反馈控制, 使闭环系统的传递函数为 $G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$, 取观测器的极点为 $-5, -5$ 。

② 画出闭环系统的状态图。

10.8 研究某线性过程 $\dot{X} = AX + Bu, y = CX$, 式中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [2 \ -1]$

要求设计一个观测器, 使 $\hat{x}(t) - x(t)$ 以 e^{10t} 的规律衰减, 求出此观测器的特征方程和反馈矩阵 G , 写出观测器的状态方程。

10.9 系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = CX \end{cases}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$

要求设计状态反馈矩阵 K , 使闭环系统的特征值 $s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$, 相应的阻尼比为 0.707 , 自然频率为 10 s^{-1} , 设状态 x_1 和 x_2 不可量测, 试设计一个状态观测器。(提示: 观测器的特征值要远大于系统的特征值, 这样可使 x_0 与 \hat{x}_0 的差引起的观测器的瞬态响应很快衰减为零。)

附录 A 模拟试题一

一、(12 分) 已知给定系统的结构图如图 1 所示。试求系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 。

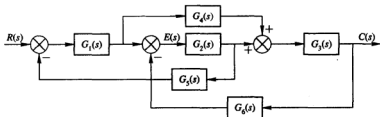


图 1

二、(10 分) 已知某单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$

(1) 希望系统的特征根位于 s 平面 $s = -2$ 的左侧区域, 且阻尼系数大于 0.5, 试画出特征根在 s 平面上的分布范围(用阴影线表示)。

(2) 当特征根处在阴影范围内时, 试求出 k 、 T 的取值范围。

(3) 当闭环极点实部为 -2 且阻尼系数等于 0.5 时, 试求超调量和调节时间。

三、(10 分) 已知某负反馈系统前向通道传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+a)}{s^N(Ts+1)}$, 反馈通道传递函数为 $H(s) = 1/k$; 系统的位置稳态误差为零, 其单位阶跃响应稳态值为 10, 初始斜率为 10, 试决定 k 、 N 与 T 值。

四、(14 分) 已知控制系统闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{as}{(s^2 + 5s + 25)(s + 50) + a}$$

试绘制以 a 为变量的大致根轨迹。(要求给出绘制根据)

五、(14 分) 已知控制系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-1)}$$

试绘制其大致的奈奎斯特曲线, 并用奈奎斯特稳定判据分析 k 值与系统稳定性的关系。(要求有相关的数学表达式, 对图的形状和特点加以说明)

六、(15 分) 单位反馈系统原有部分的开环传递函数为 $G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$, 要求校正后系统的速度误差系数 $k_v = 10$, 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$, 穿越频率 $\omega_c > 4 \text{ s}^{-1}$, 试确定串联校正装置的类型, 并进行设计。

七、(10分)系统如图2所示,其中 $G_h(s)$ 为零阶保持器, $G_o(s)=\frac{k}{s(s+2)}$,采样时间 $T=1$,试求出系统稳定时的 k 值范围。

注: $Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{TZ^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$, $Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{1-e^{-aT}Z^{-1}}$

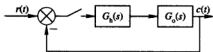


图2

八、(15分)已知系统如图3所示,其中 x_1, x_2 为状态变量。

- (1) 写出系统状态空间表达式;
- (2) 设计全维观测器,要求 $\bar{X}-X$ 以 e^{12t} 速度收敛;
- (3) 设计状态反馈,使闭环极点配置在 $-3 \pm j5$ 上;
- (4) 画出包含全维观测器总体的状态结构图。

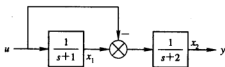


图3

附录 B 模拟试题二

一、(10分)已知系统的结构图如图1所示,其中 $a, b, T_d, k > 0$ 。

(1) 试求 k 的稳定范围;

(2) 在前向通道串一个 $(1 + T_d s)$ 环节,试说明在什么条件下,不管 k 值怎样变化,系统总是稳定的。

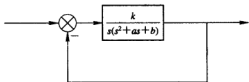


图 1

二、(12分)某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2s + 5)}$ 。

(1) 绘制系统的根轨迹;

(2) 确定使系统单位斜坡响应的稳态误差终值为 $e_{ss} = 0.625$ 的 k 值;

(3) 能否通过改变 k 值使系统的一对共轭复根阻尼系数为0.5? 试说明之。

三、(14分)系统的开环传递函数为:

$$(1) G(s)H(s) = \frac{2}{s^2(s+1)} \quad (2) G(s)H(s) = \frac{3(s+3)}{s(s-1)}$$

试绘制极坐标图的大致图形(ω 从 $-\infty$ 到 ∞),并用奈奎斯特稳定判据判断系统的稳定性。

四、(15分)单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$,要求校正后系统的开环

增益为 $k = 10$,相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$,穿越频率 $\omega_c > 4 \text{ s}^{-1}$,试确定串联校正装置的类型,并进行设计。

五、(14分)求图2所示闭环采样离散控制系统稳定时的 k 值范围。已知采样时间为

$$T = 1 \text{ s}, Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{TZ^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}, Z\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{1-e^{-aT}Z^{-1}}.$$

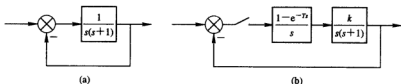


图 2

六、(10分)已知非线性系统如图3所示,问系统是否存在自振?若存在,则求出输出端自振参数(振幅和频率)。(注: $-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4} \sqrt{A^2-1} - j\frac{\pi}{4}$)

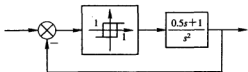


图3

七、(15分)设某系统的状态方程为: $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$, $y = [1 \ 0] \mathbf{X}$; 要求通过状态反馈使系统的阻尼系数为 0.707, 无阻尼自然频率为 10 s^{-1} , 假设该系统状态 X_1 , X_2 是不可测量的。试设计状态反馈阵 \mathbf{K} 和观测器反馈阵 \mathbf{G} , 并画出设计方案图。

八、(10分)已知线性定常系统的状态空间表达式为: $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$, $y = [1 \ 0 \ 1] \mathbf{X}$; 试问系统是否可控? 是否可观测? 并求系统的传递函数 $G(s)$ 。

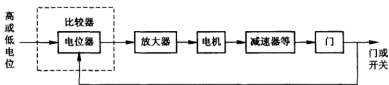
附录 C 各章习题参考答案

第 1 章

1.1 略。

1.2 该系统特点是水银柱达到 a 点温度时,继电器接通,加热丝断电。水银柱低于 a 点温度时,继电器断开,加热丝通电。 a 点温度为期望值。加热丝只有通断两种情况。实际温度不可能稳定在 a 点上。这是一种继电器式控制系统,属于非线性系统。

1.3 提示:系统的给定值有两种情况,低电位和高电位分别对应门的关闭和打开。结构图如答图 1-1。



答图 1-1

1.4 结构图如答图 1-2。



答图 1-2

第 2 章

$$2.1 \quad G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} =$$

$$\frac{K_2}{RCLMs^4 + (RCLf + LM)s^3 + (2RCLK + Lf + RM + RCK_1K_2)s^2 + (2LK + Rf + K_1K_2)s + 2RK}$$

$$2.2 \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Bs + K}{s^2(Ms^2 + Bs + K)}$$

$$2.3 \quad (1) f(t) = 2e^{-3t} - e^{-2t} \quad (2) f(t) = 2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t}$$

$$(3) f(t) = 1 + \cos t - 5 \sin t \quad (4) f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t}$$

$$2.4 \quad (1) c(t) = 5e^{-t}\sin 2t \quad (2) c(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-t}\cos 2t$$

$$(3) c(t) = \frac{5}{2}[e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)}\cos 2(t-2)]1(t-2)$$

$$(4) c(t) = \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{15}{2}e^{-t}\cos 2t - 5e^{-t}\sin 2t$$

$$(5) c(t) = \frac{5}{2}te^{-t} - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-t}\cos 2t + \frac{15}{4}e^{-t}\sin 2t$$

$$2.5 \quad (1) \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{600}{s^2 + 70s + 600} \quad (2) g(t) = -12e^{-60t} + 12e^{-10t}$$

$$2.6 \quad c(t) = 0.2t^2 - 0.4t + 0.4 - 0.4e^{-t}$$

$$2.7 \quad c(t) = 1 + 2e^{-2t} - 4e^{-t}$$

$$2.8 \quad K = 1 \text{ 时, } c(t) = [0.5 - 0.5e^{-(t-1)}] \cdot 1(t-1) - [0.5 - 0.5e^{-(t-2)}] \cdot 1(t-2)$$

$$K = 10 \text{ 时, } c(t) = \frac{10}{11}[1 - e^{-5.5(t-1)}] \cdot 1(t-1) - \frac{10}{11}[1 - e^{-5.5(t-2)}] \cdot 1(t-2)$$

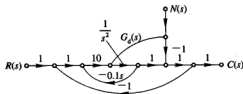
$$2.9 \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_2G_3G_4}{1 + G_2G_5 + G_2G_3G_6 - G_1G_2G_5}$$

$$2.10 \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_1G_4 - G_2G_5 + G_1G_3G_4G_5}{1 + G_1G_2 + G_1G_4 + G_1G_3}$$

$$2.11 \quad (1) G_0(s) = \frac{10}{s^2 + s}$$

$$(2) \text{ 信号流程图如答图 2-1, } \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_d(s) - (s^2 + s)}{s^2 + s + 10}$$

$$(3) G_d(s) = s^2 + s$$



答图 2-1

$$2.12 \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2 - G_1}{1 + G_2H_1 + G_2H_2 - G_1H_1}$$

$$2.13 \quad \begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1G_2G_4 \\ -G_1G_2G_3 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

$$2.14 \quad \frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{G_2G_3 - G_1G_2G_3 + G_2}{1 + G_2G_3 - G_1 + G_1G_2 - G_1G_2G_3}$$

$$\frac{C(s)}{R_2(s)} = \frac{G_1 - G_1G_2}{1 + G_2G_3 - G_1 + G_1G_2 - G_1G_2G_3}$$

$$C(s) = \frac{C(s)}{R_1(s)} \cdot R_1(s) + \frac{C(s)}{R_2(s)} \cdot R_2(s)$$

第 3 章

3.1 (1) $\delta\% = 4.32\%$ (2) $t_s = 4\text{ s}$ (3) $e_{ss} = 0$

3.2 $K = 100, K_d = 0.09$.

3.3 (1) $G_3(s) = \frac{1}{8s}$ (2) $k = 1$ 时, $e_{ss} = 2.5$; $k = 2$ 时, 系统不稳定, 稳态误差为无穷大。

3.4 (1) $K < \frac{(n+1)^2(n^2+1)}{n^2}$

(2) $n = 1$ 时, $K < 8$; $n = 0.5$ 时, $K < 11.25$; $n = 0.1$ 时, $K < 122.21$ 。

(3) n 越小, K 的相应稳定域越大; $n = 1$ 时, K 的相应稳定域最小。

3.5 (1) $120 \leq K_1 < 240$

(2) 将扰动点后的积分环节移至扰动作用点前的环节。

3.6 (1) $s_{1,2} = -0.75 \pm j1.2, s_3 = -5$; 因为 $\frac{-5}{-0.75} > 5$, 所以存在主导极点, 主导极点为 $s_{1,2}$

(2) $\xi = 0.53, \omega_n = 1.41\text{ s}^{-1}, M_p = 14\%, t_p = 2.63\text{ s}, t_s = 5.35\text{ s}$

(3) $h(t) = 1 - 0.1e^{-5t} + 1.34e^{-0.75t}\cos(1.2t + 132.2^\circ)$; 非主导极点仅对单位阶跃响应起始部分有一些影响, 可以忽略。

3.7 (1) $c(t) = 1 - e^{-t} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(2) $c(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{\sqrt{417}}{12}e^{-0.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right), \varphi = \arctan \frac{5\sqrt{3}}{8}$

(3) 增加零点, 系统模态不变, 但各项系数发生改变, 使系统的阻尼增加, 超调下降, 调整时间缩短, 但不影响稳态误差及自然频率。

3.8 $C_0 = 0, C_1 = 0.002, C_2 = 3.92 \times 10^{-4}, C_3 = 4.78 \times 10^{-6}, \dots$ 取前三项得:

$e_{ss}(t) = 9.9 \times 10^{-3}\cos 5t - 4.9 \times 10^{-3}\sin 5t$; 稳态误差幅值为 0.011。

3.9 (1) 不能直接用; (2) $0 < K < 5, K > 0, 0 < K < 11$; (3) 不同的近似, 取值范围不同。用第一种近似和第三种近似较接近实际值; 当迟后环节时间常数较小时, 近似处理结论较准确。

3.10 $r(t) = \frac{1}{8}te^{-\frac{1}{2}t}$

3.11 4 个极点。

3.12 (1) 稳定; (2) 不稳定, 有 2 个极点在 S 平面右半部; (3) 临界稳定, 右半平面无根, 但虚轴上有 2 个极点; (4) 稳定; (5) 不稳定, 有 2 个极点在 S 平面右半部; (6) 不稳定, 有 2 个极点在 S 平面右半部; (7) 临界稳定, 右半平面无根, 但虚轴上有 2 个极点; (8) 临界稳定, 右半平面无根, 但虚轴上有 4 个极点; (9) 不稳定, 有 2 个极点在 S 平面右半部;

(10) 不稳定, 有 2 个极点在 S 平面右半部。

3.13 $K_{\max} = 0.75$

3.14 (1) $0 < K_1 < \frac{(T_1 + T_2 + T_1 K_2 a)(1 + K_2 a)}{T_1 T_2 K_2}$

(2) $0 < K_1 < 17.6$; $K_1 = 10$ 时系统稳定; $K_1 = 20$ 时系统不稳定。

3.15 系统 a: 不稳定; 系统 b: $K_p = \infty$, $K_v = -10$, $K_a = 0$

3.16 (1) $\xi = 0.316$, $\omega_n = 3.16$, $e_{ss} = 0.2$

(2) $K_t = 1.896$, $e_{ss} = 0.39$

(3) $K_t = 5.2$, $K_A = 36$

3.17 $K_1 = 21$, $K_t = 0.178$, $t_d = 0.297$, $t_r = 0.538$, $t_s = 1.69$

3.18 (1) $G_1(s) = \frac{2}{s+2}$

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{10}{9}$, $t_p = 1.21$, $\delta\% = 16.3\%$, $t_s = 2.67$, $e_{ss} = \frac{20}{9}$; 图略。

第 4 章

4.1 ① $G(s) = \frac{aTs}{s^2 - 2s + 2} = -1$, $K = 2T$, 渐近线 $\delta = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; 分离点

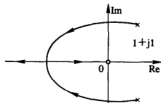
$s = -\sqrt{2}$, $K = 4.83$, $T = 2.41$, 出射角 $\theta = 135^\circ$; 虚轴

交点 $s = \pm j2$, $K = 2$, $T = 1$ 。根轨迹见答图 4-1。

② 无超调 $T > 2.41$ 。

③ 不稳定 $0 < T < 1$ 。

4.2 $G_o(s) = \frac{16(s+1)}{s^2(\frac{1}{6}s+1)}$

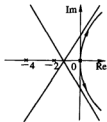


答图 4-1

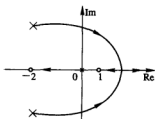
4.3 渐近线: $\delta = -\frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; 特征根 $s_1 = -2.206$, $s_{2,3} = 0.103 \pm j0.665$ 。

根轨迹见答图 4-2。

4.4 渐近线: $\delta = -3$, $\varphi = 2k\pi$; 分离点: $s = 3.193$; 出射角: $\theta = 16.3^\circ$; 虚轴交点: $s = \pm j2.26$, $K = 2.877$ 。根轨迹见答图 4-3。稳定时 $0 < K < 2.877$ 。



答图 4-2



答图 4-3

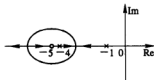
4.5 ① $(\delta+z)^2 + \beta^2 = (z-P_1)(z-P_2)$; 根轨迹见答图 4-4。

② 分离点: $s_1 = -3, s_2 = -7$; 对应值 $K_1 = 1, K_2 = 9$ 。临界阻尼时闭环:

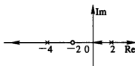
$$\phi_1(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+4)+s+5} = \frac{s+5}{s^2+6s+9}$$

$$\phi_2(s) = \frac{9(s+5)}{(s+1)(s+4)+9(s+5)} = \frac{9(s+5)}{s^2+14s+49}$$

4.6 ① 根轨迹见答图 4-5; ② $K > 4$ 时稳定; ③ $K > 9$ 。



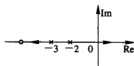
答图 4-4



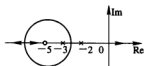
答图 4-5

4.7 $G_o(s) = \frac{P(s+5)}{(s+2)(s+3)} = 1$; $P > 0$ 时根轨迹见答图 4-6(a)。

$P < 0$ 时分离点 $s_1 = -2.55, s_2 = -7.45$; 根轨迹见答图 4-6(b)。



(a)



(b)

答图 4-6

4.8 ① 渐近线: $\delta = -3, \varphi = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; 虚轴交点:

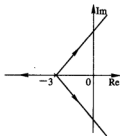
$$s = \pm j3\sqrt{3}, K = 216.$$

根轨迹见答图 4-7。

② 极点: $s_{1,2} = -1 \pm j2\sqrt{3}, \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \omega_n = \sqrt{13}$;

$$\delta\% = 40.4\%,$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4 \text{ s}, K_p = \infty$$



答图 4-7

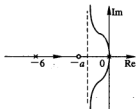
4.9 ① $\phi(s) = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + K}$

② $G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+a)}, (0 < a < 6)$, 渐近线: $\delta = \frac{a-6}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

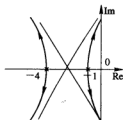
根轨迹见答图 4-8。

4.10 渐近线: $\delta = -2.5$, $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 虚轴交点: $s_{1,2} = \pm 2j$, $K = 100$ 。

根轨迹见答图 4-9。稳定 K 值: $0 < K < 100$ 。



答图 4-8



答图 4-9

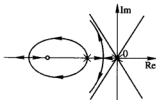
4.11 $G_o(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)^3} = -1$ 渐近线: $\delta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

分离点: $s_1 = -0.268$, $K_1 = 0.0385$; $s_2 = -3.732$, $K_2 = 103.96$

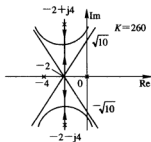
特征根为实根时, $0 < K < 0.0385$ 。根轨迹见答图 4-10。

4.12 (1) 渐近线: $\delta = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; 分离点 $s_1 = -2$, $K_1 = 64$; $s_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{6}$,

$K_{2,3} = 100$; 虚轴交点: $s = \pm j\sqrt{10}$, $K = 260$ 。根轨迹见答图 4-11。



答图 4-10



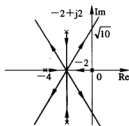
答图 4-11

(2) 渐近线: $\delta = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; 分离点: $s_1 = -2$, $K_1 = 16$ 。虚轴交点: $s = \pm j2$,

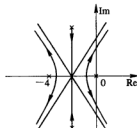
$K = 80$ 。根轨迹见答图 4-12。

(3) 渐近线: $\delta = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; 分离点: $s_1 = -0.775$, $s_2 = -3.22$; 虚轴交点: $s =$

$\pm j1.58$, $K = 46.25$ 。根轨迹见答图 4-13。



答图 4-12



答图 4-13

第 5 章

5.1 ① $K = 9$ $a = 3$ ② $\omega = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2.12$ $A_{\max} = 23.38$

5.2 不稳定

5.3 $0 < K < 7$

5.4 $K > 1$ 稳定; $K = 1$ 临界稳定; $K < 1$ 不稳定, 有 2 个根在 S 平面右半部分

5.5 图略; (提示: 请注意有关相角表达式的区别。)

① $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{-1} - \arctan 5\omega = (-180^\circ - \arctan 1) - \arctan 5\omega$

② $\varphi(\omega) = (-180^\circ + \arctan 1) - \arctan 5\omega - 90^\circ$

③ $\varphi(\omega) = -2 \times 90^\circ + (-180^\circ + \arctan 1) - \arctan 5\omega$

④ $\varphi(\omega) = -2 \times 90^\circ - \arctan 5\omega + (180^\circ - \arctan \omega)$

⑤ $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega + \arctan \frac{-\omega}{1} = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan \omega$

⑥ $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 5\omega + (\arctan \omega)$

⑦ $\varphi(\omega) = -90^\circ - (180^\circ - \arctan \omega) + \arctan 2\omega - \arctan 5\omega$

⑧ $\varphi(\omega) = -2 \times 90^\circ - (180^\circ - \arctan \omega) - \arctan 5\omega + \arctan \frac{-2\omega}{1}$
 $= -2 \times 90^\circ - (180^\circ - \arctan \omega) - \arctan 5\omega - \arctan 2\omega$

5.6 $G(s)H(s) = \frac{4}{s(0.5s+1)}$ $0 < \tau < 0.67$

5.7 $G_2(s) = \frac{T_s+1}{\tau s+1}$, 系统稳定

5.8 不稳定 ($z = 2$)

5.9 $K = 0.75$

5.10 $K = 8$ $K = 8 + \frac{2(a-1)^2}{a}$

5.11 ① 不稳定, 无论如何改变值, 系统均不稳定; ② 略。

5.12 $390 < K < 1584$ 或 $K < 10$ 时系统稳定。(提示, $\omega_c < \omega_1$ 或 $\omega_2 < \omega_c < \omega_3$ 时系统稳定。)

5.13 (a) 闭环不稳定 $Z = 4$ (b) 闭环稳定

5.14 (a) $Z = 2$ (b) $Z = 2$

5.15 ① $0.5 < K < 1$

② $0.5 < K < 1$ 稳定; $K > 1$, $Z = 2$ 不稳定; $K < 0.5$, $Z = 2$ 不稳定。

5.16 ① 不稳定 ② 不能 ③ $\tau > 2$ 时系统稳定, τ 增加相角裕度, 提高稳定性。

5.17 ① $K = 2$ ② 是最小相位系统 ③ 系统稳定

④ 斜率为 -40 dB/dec , 相角变化量为 180°

5.18 $0.5 < K < 2$

5.19 $\gamma_{\max} = \arctan \frac{(T_1 - T_2) \sqrt{T_1 T_2}}{T_1 T_2}$

5.20 ① $a = 40.42$, $K = 950.3$ ② $t_s = 0.198$, $\omega_b = 33.06$

第 6 章

6.1 未校正系统: $\omega_c = 20$, $\gamma = -11.3^\circ$ 。要使系统稳定, 校正装置应能提供超前相角, 故选 ②。

6.2 未校正系统 $\gamma = -45^\circ$, 要使校正后 $\gamma = 45^\circ$, 需要有 90° 的超前角, 故不能简单地仅用超前校正, 也不能加比例积分, 不能简单地加滞后校正, 只能加滞后—超前校正装置。

6.3 ① 系统不稳定, 见答图 6-1。

② 可串联超前校正装置, 加比例微分环节。

6.4 ① $\delta\% = 53.3\%$, $t_s = 0.235 \text{ s}$

② K_1 闭合 K_2 断开: $\delta\% = 16.3\%$, $t_s = 0.3 \text{ s}$;

K_1 断开 K_2 闭合: $\delta\% = 16.3\%$, $t_s = 0.09 \text{ s}$

6.5 $G_c(s) = \frac{0.4s+1}{0.02s+1}$

6.6 $H(s) = \frac{0.175(0.0689s+1)}{0.689s+1}$

6.7 串入滞后—超前校正装置, 如

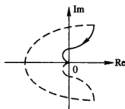
$$G_c(s) = \frac{(s+0.5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.01)}$$

6.8 $G_c(s) = \frac{0.9(s+1)}{0.2s+1}$

6.9 (1) $\phi(s) = \frac{K}{s^3(s+6)+K}$, (2) 加如比例微分校正 $G_c(s) = K(\tau s+1)$

6.10 略。

6.11 $K_1 = \frac{1}{4}$ $D(s) = \frac{s^2[(22.4s+1)(0.02s+1)-(s+1)^2]}{2000(s+1)}$



答图 6-1

$$6.12 \quad ① \omega_c = 1.59, \gamma = 58.8^\circ, M_r = 1.17, K = 1.59 \quad ② K_e = 1.59$$

$$③ \omega_r \approx \omega_c \cos \gamma = 0.82 \quad ④ A(\omega_r) = 1.17, A(\omega_c) \approx \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = 1.01$$

$$6.13 \quad ① \omega_c = 1.46, \gamma = 73^\circ, \omega_k = 4.34 \text{ s}^{-1}, K_k = 13.3 \text{ dB}, \delta\% = 0$$

$$② \omega_c = 0.93, \gamma = 54^\circ, \omega_k = 2.47 \text{ s}^{-1}, K_k = 12 \text{ dB}, \delta\% = 15.3\%$$

$$③ \omega_c = 0.44, \gamma = 31.3^\circ, \omega_k = 1.73 \text{ s}^{-1}, K_k = 19.5 \text{ dB}, \delta\% = 41.2\%$$

第 7 章

$$7.1 \quad ① e(0) = 0 \quad e(\infty) \text{ 不存在终值} \quad ② e(0) = 1 \quad e(\infty) \text{ 不存在终值}$$

$$7.2 \quad ① E(z) = \frac{2zT(z^2 \cos \omega T - 2z + \cos \omega T)}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2} \quad ② E(z) = \frac{Tz e^{-\sigma T}}{(z - e^{-\sigma T})^2}$$

$$③ E(z) = \frac{ze^{-\sigma T} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-\sigma T} \cos \omega T + e^{-2\sigma T}} \quad ④ E(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$7.3 \quad ① f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2e^{\sigma T}} n(n+1) e^{-(n+1)\sigma T} \delta(t - nT)$$

$$② f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2.25} [1 + (3n-1) \cdot (-0.5)^n] \cdot \delta(t - nT)$$

$$③ f^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n & n = 4m-3 \quad m = 1, 2, 3\cdots \\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n & n = 4m-1 \quad m = 1, 2, 3\cdots \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n & n = 4m \quad m = 1, 2, 3\cdots \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n & n = 4m-2 \quad m = 1, 2, 3\cdots \end{cases}$$

$$7.4 \quad ① e^*(t) = 10 \cdot \sum_{n=0}^N (2^n - 1) \delta(t - nT)$$

$$② F(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 3.5 & k = 1 \\ 8 - 13 \cdot (0.5)^k & k \geq 2 \end{cases}$$

$$7.5 \quad ① \gamma(t) = \delta(t) \text{ 时}, C(nT) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2^{\sigma T}) + \frac{1}{6} \cdot 4^{\sigma T}$$

$$② \gamma(t) = 1(t) \text{ 时}, C(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, n = 1 \\ \frac{1}{8} \cdot (4)^n - \frac{1}{4} \cdot (2)^n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$7.6 \quad ① \text{ 均在单位圆内} \quad ② \text{ 有根位于圆外(2个)}$$

$$7.7 \quad ① G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.2z(z-0.368)}{z^2+0.118z+0.449}$$

$$② \text{ 稳定}, z = 0.059 \pm j0.6675 \quad ③ e_{ss} = -0.089$$

7.8 ① 稳定 ② $C(0) = 0$ $C(1) = 0.632$ $C(2T) = 0.639$ $C(3T) = 1.21$

③ $e_{ss} = 0$

7.9 $K_1 + K_2 + 1 > 0.368$

7.10 ① $G(z) = K \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$ ② T 越大, 稳定性越差

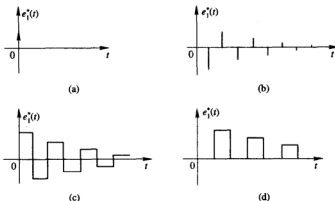
7.11 ① $0 < T < \ln \frac{11}{9}$ ② $0 < T < \ln \frac{K+1}{K-1}$ (提示: 稳定才有稳态误差)

7.12 ① $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_2G_3(z)+G_1(z)G_2H(z)}$ ② $e(T) = 0.368$ $e_{ss} = 0$

7.13 $C(z) = \frac{RG_2G_4(z) + G_2G_3G_4(z) \cdot RG_1(z)}{1 + G_2G_3G_4(z)}$

7.14 ① $0 < K < 4.329$ ② $e_{ss} = 1$

7.15 $D(z) = \frac{1-az^{-1}}{KTy(1-\beta z^{-1})}$, 图见答图 7-1



答图 7-1

7.16 ① $D(z) = \frac{z-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}$ ② $\frac{E_2(z)}{R(z)} = \frac{1}{1-e^{-T}}(1-e^{-T}z^{-1})$ 故无波纹

第 8 章

8.1 图 8-31 可简化为答图 8-1, 相轨迹见答图 8-2。

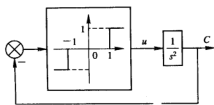
8.2 相轨迹见答图 8-3。

8.3 相轨迹见答图 8-4。

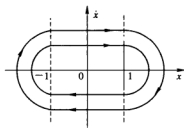
8.4 相轨迹见答图 8-5。

8.5 根轨迹见答图 8-6。在较小的信号作用下, 系统过渡过程是非周期的, 在较大的信号作用下, 系统具有振荡特性的过渡过程, 从而使系统响应速度提高, 且稳态误差为零。

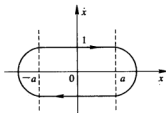
8.6 起点 $(R, 0)$; 相轨迹见答图 8-7。



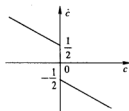
答图 3-1



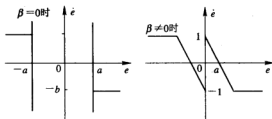
答图 8-2



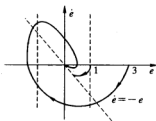
答图 8-3



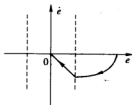
答图 8-4



答图 8-5



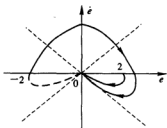
答图 8-6



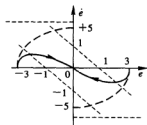
答图 8-7

8.7 根轨迹见答图 8-8。(说明:当运动轨迹在右半平面时,相轨迹按稳定焦点运行;当运动轨迹在左半平面时,相轨迹按不稳定焦点运行;无论起始点在何处,相轨迹都会进入第一象限并最终收敛于坐标原点。)

8.8 稳定节点、起点 $(R, 0)$ 。根轨迹见答图 8-9。(说明:加入微分反馈后,使开关线逆时针转动 $\varphi = \pi/4$ 角,使转换时间提前,从而改善系统性能。)



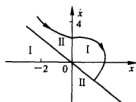
答图 8-8



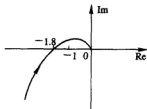
答图 8-9

8.9 I 区: $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$, 鞍点, II 区: $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$, 不稳定焦点, 相轨迹见答图 8-10。

8.10 ① 相轨迹见答图 8-11 ② 存在自振荡 $\omega = 1$ $A = 1.1$



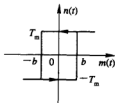
答图 8-10



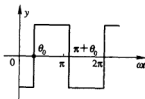
答图 8-11

8.11 提示:两串联非线性可等效为有回环的继电器特性见答图 8-12。

(1) 波形见答图 8-13 (2) $N(A) = \frac{4T_m}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - j \frac{4Mb}{A^2}$ ($A \geq b$)



答图 8-12



答图 8-13

$$8.12 \quad ① K_c = \frac{3\pi D}{4T_m}$$

② $K = K_c$ 时, 临界振荡点; $K < K_c$ 时, 稳定; $K > K_c$ 时, 自持振荡, 幅值小时不稳定, 幅值大时自持振荡。当 $K = 2K_c$ 时, 振荡频率 $\omega = \sqrt{2}/2$, 振幅 $E = 3.864D$

$$8.13 \quad ① \text{ 存在自激, 频率 } \omega = 200, \text{ 振幅 } A_1 = 0.76(\text{舍}) A_2 = 1.83$$

② 可减小开环增益

$$8.14 \quad ① K < \frac{2}{3} \text{ 稳定; } \frac{2}{3} < K < 2 \text{ 自激; } K > 2 \text{ 不稳定。}$$

$$② \omega = 1 \quad A = \frac{4-6K}{K-1} \quad \left(\frac{2}{3} < K < 2\right)$$

$$8.15 \quad ① K < 0.471 \quad ② c_1(t) = 2\sqrt{2} \sin(t + 135^\circ)$$

第 9 章

$$9.1 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$9.2 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$9.3 \quad ① \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad ② \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$③ \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}$$

$$9.4 \quad \mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ 2e^{-2T} - 2e^{-T} & 2e^{-2T} - e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{X}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0.99 & 0.086 \\ -0.172 & 0.732 \end{bmatrix} \mathbf{X}_k + \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0086 \end{bmatrix} u \quad t = T \quad T = 0.1$$

$$9.5 \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \phi^{-1}(t) = \phi(-t) = \begin{bmatrix} e^t & -te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9.6 \quad ① \phi^{-1}(t) = \phi(-t), \text{ 故 } \phi(t) \text{ 是状态转移矩阵, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

② 由于 $\phi^{-1}(t) \neq \phi(-t)$, 故 $\phi(t)$ 不是状态转移矩阵

9.7 证: $\phi(t, \tau)\phi(\tau, t) = I$, 故 $\phi(t, \tau) = \phi^{-1}(\tau, t)$, 而 $\frac{\partial}{\partial \tau}\phi(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}[\phi^{-1}(\tau, t)] = -\phi^{-1}(\tau, t)\frac{\partial}{\partial \tau}[\phi(\tau, t)]\phi^{-1}(\tau, t) = -\phi^{-1}(t, \tau)A(\tau)\phi(\tau, t)\phi^{-1}(\tau, t) = -\phi(t, \tau)A(\tau)$

$$9.8 \quad (1) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \quad \dot{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1+j & j \\ 0 & 2j & -2j \end{bmatrix} \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1+j & \\ & & -1-j \end{bmatrix} \quad \dot{b} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -j & 1-j \\ j & 1+j \end{bmatrix}$$

$$\dot{c} = [0 \quad 2j \quad -2j] \quad d = [1 \quad -1]$$

$$(3) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \dot{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dot{c} = [0 \quad 3 \quad 0] \quad d = 0$$

$$9.9 \quad (1) \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = AX + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = CX$$

$$(2) \quad C(M-A)^{-1}B = \frac{1}{s^3+6s^2+10s+6} \begin{bmatrix} s+4 & s+2 \\ s+3 & s^2+3s+3 \end{bmatrix}$$

$$9.10 \quad (1) \quad G(s) = \frac{s^2+s-4}{s^2+2s-1}$$

$$(2) \quad G(s) = \left[\frac{s^2-45s-18}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad \frac{s^2-91s+30}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-2)} \begin{bmatrix} -2s^2+2s+4 & 2s^2-2s+5 \\ 2s^2-2s-3 & 2s^2+2s+4 \end{bmatrix}$$

$$9.11 \quad \text{串联补偿} \quad G_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ -\frac{(2s+1)(s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

$$\text{前馈补偿} \quad G_c(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -(2s+1) & \frac{s+2}{5s+1} \end{bmatrix}$$

9.12 (1) $x_1(0) = 2$ $x_2(0) = -1$ (2) $\beta = 0$ 时 $x_2(0)$ 求不出, 此时系统不能观

$$9.13 \quad x_k = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{8} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

$$9.14 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{系统可控可观}$$

$$9.15 \quad \textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \text{ 可控不可观} \quad \textcircled{3} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s+5}{s^2+4s+3}$$

9.16 提示: 因为 A 为标准型, 可知能控能观状态变量为 x_1, x_4 , 能控不能观为 x_3 , x_5 , 不能控能观为 x_2, x_6 , 重新排列令 $\hat{x} = [x_1 \ x_4 \ x_3 \ x_5 \ x_2 \ x_6]^T$

$$\text{则分解后为: } \dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \hat{X}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left[sI - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{-2(s+1)}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$9.17 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

9.18 ① 稳定 ② 不可控 ③ 可以

9.19 ① 不可选择 a, b, c ② 不可选择 a, b, c

$$9.20 \quad \textcircled{1} \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \dot{c} = (0 \ 0 \ 1)$$

$$\textcircled{2} \quad P = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dot{c} = (3 \ 2 \ 1)$$

9.21 ① 稳定, $V(x)=x^2$ ② 稳定, $V(x)=x_1^2+x_2^2$ ③ 在平衡点稳定

9.22 ① $\phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix}$ ② $a \neq 1, 0.5$

9.23 ① $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$, 稳定; 当 $2x_1x_2 < 1$ 时是渐进稳定的

② $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$, 稳定; 当 $x_2^2 < 1$ 时是渐进稳定的

9.24 $a < -1, b < 0$

9.25 提示: 取 $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ 一致渐进稳定

第 10 章

$$10.1 \quad G_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(s+1)} & \frac{1}{2(s+2)} \\ \frac{s-1}{2s(s+1)} & \frac{s+1}{2s(s+2)} \end{bmatrix}$$

10.2 ① 不可控, 但可观(可控维数为 2)

② $K = (-1 \ 0 \ 0)$

10.3 不能, $\xi = 0.707 \quad \begin{cases} 2\xi\omega_n = K_1 - 2K_0 - 1 \\ \omega_n^2 = K_1 - 2K_0 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 - \sqrt{2}\omega_n + 1 = 0 \\ \omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

10.4 开环: 可控、可观; 闭环: 可控、不可观

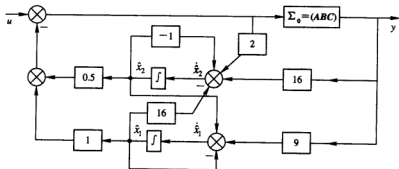
10.5 ① 不稳定, K_1 任意, $K_2 > 1, K_3 > 3$

② 不稳定, $K_1 < -2, K_2$ 任意, $K_3 > 3$

10.6 $K = [-2 \ -14 \ -16]$

10.7 $G = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -16 & -1 \end{bmatrix} \tilde{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} y$

$K = [1 \ 0.5]$; 图见答图 10-1。

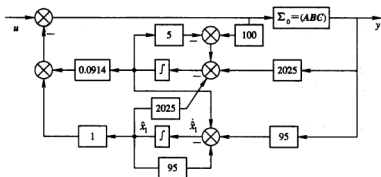


答图 10-1

10.8 提示: $\hat{X}-X$ 以 e^{-10t} 衰减, 要求观测器极点在 S 平面 -10 纵线的左侧。

10.9 $K=[1 \quad 0.0914] \quad G=\begin{bmatrix} 95 \\ 2025 \end{bmatrix}$, 观测器极点设为 $-50, -50$ 。图见答图 10-2。

$$\dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -95 & 1 \\ -2025 & -5 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 95 \\ 2025 \end{bmatrix} y \quad \omega = [1 \quad 0.0914] \hat{X}$$



答图 10-2

参 考 文 献

- 1 李培豪,余文休等.自动控制原理例题与习题.北京:电子工业出版社,1989
- 2 胡寿松,沈程智等.自动控制原理习题集.北京:国防工业出版社,1990
- 3 周春晖,历玉鸣.控制原理例题与习题集.北京:化学工业出版社,2001
- 4 史忠科,卢京潮.自动控制原理——常见题型解析及模拟题.西安:西北工业大学出版社,1998
- 5 夏德铃.自动控制理论实验和习题集.北京:机械工业出版社,1994
- 6 胡寿松.自动控制原理.北京:国防工业出版社,1994
- 7 吴麒.自动控制原理(上、下).北京:清华大学出版社,1992
- 8 戴忠达.自动控制理论基础.北京:清华大学出版社,1991
- 9 孙增圻.系统分析与控制.北京:清华大学出版社,1994
- 10 刘豹.现代控制理论.北京:机械工业出版社,1999
- 11 王孝武.现代控制理论基础.北京:机械工业出版社,1998
- 12 谢红卫等译.现代控制系统.北京:高等教育出版社,2001